ある退化放物型方程式の解の正則性評価について

水野 将司 (東北大学 大学院理学研究科 D3・日本学術振興会特別研究員 DC)

1. 序

次の退化放物型方程式を考える.

$$\text{(dP)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), & t>0\,,\, x\in\mathbb{R}^n \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

ここで, $\alpha>1$ は定数であり, $f=f(t,x)$ は与えられた $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{R}^n$ 値関数とする. $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1}\nabla u)$ となることから, $u=0$ のとき, 拡散係数 $\alpha u^{\alpha-1}$ が消える方程式となっている. このように, 拡散係数が消えることのある方程式は一般に退化した方程式と呼ぶ. なお, 熱方程式に対応する $\alpha=1$ とした (dP) では, 拡散係数は消えない, すなわち退化しないことに注意しておく.

外力 f は xu や $u\nabla(-\Delta+1)^{-1}u$ を想定している. ここで, $(-\Delta+1)^{-1}u$ は u の Bessel ポテンシャル, すなわち $(-\Delta+1)^{-1}u = \mathscr{F}^{-1}[(|\xi|^2+1)^{-1}\mathscr{F}u]$ で与えるものとする ($\mathscr{F}u$ は u の Fourier 変換, $\mathscr{F}^{-1}u$ は u の逆 Fourier 変換を表す). xu は $f\equiv 0$ に対する方程式 (dP)(この方程式は porous medium 方程式と呼ばれる) の解の前方自己相似変換がみたす方程式にあらわれる (cf. Giga-Kohn [8], Carrillo-Toscani [4]). u の係数は非有界であるばかりでなく, 可積分性すらもたないことに注意しておく. また, $u\nabla(-\Delta+1)^{-1}u$ は Keller-Segel 方程式系にあらわれる非線形項である. $(-\Delta+1)^{-1}u$ は非局所項なため, (dP) に対して比較原理が一般には成立しないことに注意しておく.

$\sigma = n(\alpha-1)+2\,,\ A>0$ とおくと, Barenblatt 解

$$\mathscr{U}(t,x) := (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}}\left(A - \frac{\alpha-1}{2\alpha}\frac{|x|^2}{(1+\sigma t)^{\frac{2}{\sigma}}}\right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

が超関数の意味で porous medim 方程式をみたすことが知られている (cf. Vázquez [13]). ここで $(f)_+ = \max\{0,f\}$ である. Barenblatt 解の台の境界は滑らかでないため, (dP) の解も一般には滑らかにならないことがわかる. そこで, (dP) の弱解を定義する.

定義 1 (弱解, cf. Ladyženskaja-Solonnikov-Ural'ceva [9, pp.419])**.** $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ かつ, $u_0\geq 0\,, f\in L^1((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ とする. u が (dP) の弱解であるとは, $T>0$ が存在して, 次をみたすときをいう.

i) 殆んどすべての $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$ に対して $u(t,x)\geq 0$,
ii) $u\in L^\infty(0,T\,;\,L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n))$ かつ $\nabla u^\alpha \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$,
iii) u は (dP) を超関数の意味でみたす.

初期値 u_0 と外力 f に適当な条件をつければ, 弱解の存在が示せる (cf. Ôtani [12]). 我々の問題は, (dP) の弱解がどのような条件のもとに, 時空間一様な Hölder 連続になるかである. ここで, Hölder 連続性の定義を次で与える.

定義 2 (Hölder 連続性)**.** $0 < \sigma \leq 1$ に対して, $u(t,x)$ が σ 次の Hölder 連続であるとは, $C > 0$ が存在して
$$|u(t,x) - u(s,y)| \leq C(|t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^{\sigma})$$
が任意の $(t,x), (s,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つことをいう.

Hölder 連続性は微分可能性の拡張であることに注意しておく. 実際, u が 1 次の Hölder 連続のとき (このとき, u は空間変数について Lipschitz 連続であるという), u は $\mathbb{R}^n$ 上殆んど至るところ空間変数に関して微分可能となる (Rademacher の定理, cf. Evans-Gariepy [6]). (dP) の弱解は一般に微分可能にすらならないことが Barenblatt 解からわかる. そこで, (dP) の弱解がもつ正則性を Hölder 連続性の立場から調べることが我々の問題である.

この問題の応用として, 具体的に $n \geq 3$, $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$, $f = xu - u\nabla(-\Delta + 1)^{-1}u$ とした (dP) の弱解の時空間一様な Hölder 連続性が退化 Keller-Segel 方程式系の解の漸近安定性とその収束の速さに関係があることを言及しておく (cf. Ogawa [11]).

2. 主定理

$f \equiv 0$ に対する (dP), すなわち porous medium 方程式の弱解の Hölder 連続性は Caffarelli-Friedman [3] によってはじめて証明された. 彼らの証明は, Aronson-Benilan 評価 [1]
$$\Delta u^{\alpha-1} \geq -\frac{C(n,\alpha)}{t}\,,\ \partial_t u \geq -\frac{C(n,\alpha)}{t}u$$
と比較原理を本質的に用いている. しかし, $f \not\equiv 0$ に対する (dP) の弱解に対して, Aronson-Benilan 評価と同等の評価が得られるかは, 一般にはわからない. また, 外力 f の典型例として非局所的非線形項があるため, 応用上の観点からは, (dP) に対して, 比較原理を用いたくない. それゆえ, Caffarelli-Friedman の手法を (dP) に適用するのは難しいと思われる.

他方, DiBenedetto-Friedman [5], Wiegner [14] は, $p > 2$ に対して, p-Laplace 発展方程式

$$(p\text{-L})\qquad \begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, \quad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

の弱解 v の勾配が Hölder 連続になることを示した (より一般の p-Laplace 発展方程式については Misawa [10]). 彼らの証明には, 比較原理を用いていないことに注意しておく.

$n = 1$ のとき, $u = |\nabla v|$ とおくと, u はある porous medium 方程式の解となる. そのため, 彼らの手法は (dP) に対しても適用できると推測できる. 実際, DiBenedetto-Friedman は porous medium 方程式の解の Hölder 連続性を示した. 彼らは $f \not\equiv 0$ に対する (dP) の解の Hölder 連続性も考察しており, $p > n$ に対し, $f \in L^\infty(0,\infty\,;\ L^p(\mathbb{R}^n))$ であれば, 解が Hölder 連続になると主張しているが, 証明は与えられていないようである. 我々は, 彼らの証明を拡張し, より広い関数空間に属する外力に対して, (dP) の解の Hölder 連続性を示すとともに, 解の Hölder 評価を得た.

主定理を述べるために, L^p 空間より広い関数空間である, 弱 L^p 空間を導入する.

定義 3 (弱 L^p 空間)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $p > 1$ に対し, $f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ であるとは, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ かつ
$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\,;\,\mathrm{compact}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{1}{p}}} \int_K |f|\,dx < \infty$$
であるときをいう.

Hölder の不等式より $L^p(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ となるが, さらに $L^p(\Omega) \subsetneq L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ となる. 実際 $|x|^{-\frac{n}{p}} \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ だが $|x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$ となる.

注意 4. 弱 L^p 空間は分布関数 $\mu_{|f|}(\lambda) := |\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}|$ を用いて

$$L^p_{\mathrm{w}}(\Omega) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_{|f|}(\lambda)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

で定義できることが知られている. $p > 1$ のとき, 我々の定義と分布関数を用いた定義は同値となる. 実際, $c_0 > 0$ が存在して,

$$c_0 \|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} \le \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_{|f|}(\lambda)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)}$$

が成り立つ (cf. Benilan-Brezis-Crandall [2, Appendix]).

弱 L^p 空間を用いて, 記号

$$A_p := \sup_{a\in\mathbb{R}^n,\, r\le 1} \|f\|_{L^\infty(0,\infty\,:\,L^p_{\mathrm{w}}(B_r(a)))}$$

を導入する. ここで, $B_r(a)$ は, 中心 a, 半径 r の開球である. このとき, 次の定理が得られた.

定理 5. u を有界で非負な (dP) の弱解とする. 外力 f について, ある $p > n$ に対して, $A_p < \infty$ を仮定する. このとき, n, α, p にのみ依存する定数 $C, \sigma > 0$ が存在して,

(1) $$|u(t,x) - u(s,y)| \le C(\|u\|_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} + A_p)(\|u\|^{\frac{\sigma}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}|t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma)$$

が $(t,x)\,,\,(s,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ.

仮定 $A_p < \infty$ は, 外力 f が局所一様に弱 L^p であると言いかえることができる. 全空間での一様な Hölder 評価を求めるためには, 外力に一様な可積分性の評価が必要となる. なお, 定理の証明と同様にして, $f \in L^\infty(0,\infty\,;\,L^p_{\mathrm{w,loc}}(\mathbb{R}^n))$ であれば, (dP) の解の局所 Hölder 連続性が示せる. ここで

$$L^p_{\mathrm{w,loc}}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \;:\; \text{任意のコンパクト集合 } K \text{ に対し } f \in L^p_{\mathrm{w}}(K)\}$$

である.

注意 6. 熱方程式である, $\alpha = 1$ のとき, (1) はよく知られた熱方程式の解に対する Hölder 評価となっている. そのため, 評価式 (1) は熱方程式の解に対する Hölder 評価の拡張と考えることができる.

注意 7. 外力 f の可積分性について考える. 簡単のため, $f \in L^\infty(0,\infty\,;L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n))$ とする. 今, 時間微分を無視することにより

$$-\Delta u^\alpha \cong \operatorname{div} f$$

とみなす. さらに形式的に両辺を積分すると

$$-\nabla u^\alpha \cong f$$

となる. $f \in L^p_{\mathrm{w}}$ かつ, $p > n$ から, u^α は Dirichlet の増大条件, すなわち, ある $\sigma > 0$ が存在して, 任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u^\alpha|\, dx \le C r^{n-1+\sigma}$$

をみたす (cf. Giaquinta[7, pp.64]). 従って u^α は Hölder 連続となる. 定理 5 の証明での外力 f の処理は, 以上の形式的議論の正当化に対応している.

形式的議論の立場からみると, $p > n$ に対して, f が Morrey 空間 M^p に属する, すなわち

$$\int_{B_r(x_0)} |f|\,dx \le C r^{n(1-\frac{1}{p})}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$$

をみたしていれば, u^α が Hölder 連続になると推測できる. 実際に, 熱方程式である $\alpha = 1$ のときは, $\nabla u \in M^p$ となり, 解 u が Hölder 連続になることが知られている. しかし, 非線形である $\alpha > 1$ の場合に, u^α が Hölder 連続になるか否かは未解決である. さらに, $f \in M^p$ とすることは, ∇u^α の L^p 評価を導出することに対応している. しかし, 熱方程式の場合とは異なり, $f \in L^p$ であったとしても, ∇u^α の L^p 評価は $p = 2$ を除いては知られていない (少なくとも Barenblatt 解が存在することから, $p \gg n$ に対しては, $f \in L^p$ であったとしても $\nabla u^\alpha \notin L^p$ であることがわかる).

定理で得られる Hölder 次数 σ について, $\sigma \le 1 - \frac{n}{p}$ が得られる. ここで, $1 - \frac{n}{p}$ は, 形式的議論によって得られる Hölder 連続性の次数と一致する. この $\sigma > 0$ の最良定数を求める問題は, $n \ge 2$ に対しては, $f \equiv 0$ であっても未解決である.

References

[1] Aronson, D. G. and Bénilan, P., *Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans* $\mathbf{R}^N$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **288** (1979), A103–A105.

[2] Benilan, P., Brezis, H. and Crandall, M. G., *A semilinear equation in* $L^1(R^N)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) (1975) **2** 523–555.

[3] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., *Regularity of the free boundary of a gas flow in an* n*-dimensional porous medium*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 361–391.

[4] Carrillo, J. A. and Toscani, G., *Asymptotic* L^1*-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 113–142.

[5] DiBenedetto, E. and Friedman, A., *Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems*, J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 1–22.

[6] Evans, L. C. and Gariepy, R. F., "Measure theory and fine properties of functions," Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[7] Giaquinta, M., "Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems," Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1983.

[8] Giga, Y. and Kohn, R. V., *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 297–319.

[9] Ladyženskaja, O. A. and Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N., "Linear and quasilinear equations of parabolic type," Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, 1967.

[10] Misawa, M., *Local Hölder regularity of gradients for evolutional* p*-Laplacian systems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **181** (2002) 389–405.

[11] Ogawa, T., *Asymptotic stability of a decaying solution to the Keller-Segel system of degenerate type*, Differential Integral Equations **21** (2008), 1113–1154.

[12] Ôtani, M., L^∞*-energy method and its applications*, in "Nonlinear partial differential equations and their applications," GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **20**, 505–516, Gakkōtosho, 2004.

[13] Vázquez, J. L. , "The porous medium equation," Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, 2007.

[14] Wiegner, M., *On* C_α*-regularity of the gradient of solutions of degenerate parabolic systems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **145** (1986), 385–405.

E-mail address: `sa5m16@math.tohoku.ac.jp`