

Porous Media 型非線形拡散方程式の解のヘルダー連続性について

水野 将司

(東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 博士 3 年)

§1. 序

1.1. 退化拡散方程式と問題

次の非線形拡散方程式を考える:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = -\operatorname{div} f(t, x, u) & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ただし, $\alpha > 1$ とし, $f = f(t, x, u(t, x))$ は \mathbb{R}^n 値の既知汎関数とする.

$f \equiv 0$ のとき, (1.1) は Porous Medium 方程式と呼ばれている. そこで, Δu^α を Porous Medium 型非線形項と呼ぶことにする. Porous Medium 型非線形項は発散形式で書くと $\operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1} \nabla u)$ となる. この u の勾配の係数 $\alpha u^{\alpha-1}$ は拡散係数という. $\alpha > 1$ の仮定から $u = 0$ のとき, 拡散係数は 0 となる. このように, 拡散係数が 0 になりうる方程式を退化拡散方程式と呼ぶ. なお, 熱方程式である, $\alpha = 1$ のときは, 拡散係数が 0 にならないことに注意しておく.

外力 f は $f = xu$ や $\lambda \geq 0$ に対して $f = u \nabla (-\Delta + \lambda)^{-1} u$ を想定している. $\lambda > 0$ に対し, $(-\Delta + \lambda)^{-1}$ は Bessel ポテンシャルで与えられ, $(-\Delta)^{-1}$ は Newton ポテンシャルで与えられる. $f = xu$ は $f \equiv 0$ に対する (1.1) の前方自己相似変換が満たす方程式として表れる. 前方自己相似変換については, Giga-Kohn [8] や Carrillo-Toscani [4] を参照せよ. 解の前方自己相似変換の定常解への収束性を議論することによって, 元の方程式の解の漸近挙動を考察できることが知られている. この項の係数は非有界であり, 遠方で, 係数の影響が大きくなることに注意しておく. 他方 $f = u \nabla (-\Delta + \lambda)^{-1} u$ は走化性方程式や移流拡散方程式などに表れることが知られている (cf. Luckhaus-Sugiyama [12], Ogawa [15]). $\nabla (-\Delta + \lambda)^{-1} u$ の (t_0, x_0) における値を知るためには, $u(t_0)$ の \mathbb{R}^n 上全体の情報がわからないと決定できないことに注意する. このように (t_0, x_0) の局所的な情報では決定できない項を非局所項と呼ぶ. 一般に, 非局所項を持つ方程式に対しては比較原理が成り立たないことが知られている.

本稿における問題を述べるために, (1.1) の弱解を導入する.

定義 1.1. $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ かつ $u_0 \geq 0$ とする. u が (1.1) の弱解であるとは, $T > 0$ が存在して ($T = \infty$ でもよい) 次の 3 条件が成り立つことをいう.

- (i) $u(t, x) \geq 0$ a.e. $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$,

(ii) $u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ かつ $\nabla u^\alpha \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^n)$,

(iii) 任意の $\phi \in C^1([0, T]; C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(t)\phi(t) dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0\phi(0) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} u \partial_t \phi dx dt \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u^\alpha \cdot \nabla \phi dx dt = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau, x, u) \cdot \nabla \phi dx dt \quad \text{for a.e. } 0 < t < T. \end{aligned}$$

$f \equiv 0$ に対する弱解の存在については, 例えば, J.-L. Lions [11, Chapitre 1, §12]などを参照せよ. 一般の f に対する (1.1) の弱解の存在, 非存在は考察すべき問題であるが, 本稿では (1.1) の弱解が常に存在するとして議論を進める.

本稿における問題は, 先のように遠方で無限大に発散する係数や, 非局所項を外力に持つ退化拡散方程式の弱解が, どのような条件のもとに, 時空間一様な Hölder 連続性を持つかである. この問題を考えるために, Hölder 連続性の定義と有用性について考えることにする.

1.2. Hölder 連続性とその有用性

定義 1.2 (Hölder 連続). $0 < \sigma \leq 1$ に対して, $u(t, x)$ が σ 次の Hölder 連続であるとは, $C > 0$ が存在して,

$$(1.2) \quad |u(t, x) - u(s, y)| \leq C(|t - s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x - y|^\sigma)$$

が任意の $(t, x), (s, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つことをいう. (1.2) の成り立つ $C > 0$ の下限を u の σ 次の Hölder ノルムという.

注意 1.3. 時間変数 t と空間変数 x の中に違いがあるのは, 放物型距離を考えているからである. Wu-Yin-Wang [19, §1,2,3] を参照せよ. 通常の Euclid 距離に対する Hölder 連続性については, 先の Wu-Yin-Wang や Gilbarg-Trudinger [9, §4.1] を参照せよ.

注意 1.4. 以下, 空間変数についてのみ考えることにする. u が微分可能で勾配が有界であるとき, 平均値の定理から 1 次の Hölder 連続 (Lipschitz 連続) が従う. 逆に 1 次の Hölder 連続のとき, Rademacher の定理 (cf. Evans-Gariepy [7]) により, 空間方向に対して殆ど至るところ微分可能で, 勾配が有界となることが知られている. このことから, Hölder 連続性は関数の微分可能性を精密化したものと考えられることができる.

Hölder 連続性から得られる重要な結果として, 同程度連続性が挙げられる. (方程式の解などの) 関数族 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ に対して, 添字 m に依らない Hölder ノルム $C > 0$ で Hölder 連続性が示されれば, 同程度連続性が得られる (実際に楕円型方程式や放物型方程式の解の族に対しては, Hölder ノルム $C > 0$ が $|u_m|$ の上限で評価できることが多い). 他方, 最大値原理などを用いて $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ の一様有界性を導出できれば, Ascoli-Arzelá の定理から, 点列コンパクト性が示せる. 点列コンパクト性からは, 解の存在や定常解への収束を議論することができる. 実際, Ogawa [15] は (1.1) で $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$, $\lambda > 0$, $f = e^{-2t} u \nabla(-\Delta + \lambda)^{-1} u - xu$ としたとき, 解の時空間一様な Hölder 連続性を仮定すると, 解が定常解に収束することを示すとともに, 収束の位数を求めた.

微分方程式の解の Hölder ノルムに対する先験的評価を Hölder 評価 (より一般に Schauder 評価) という. 放物型方程式に対する Hölder 評価に比べると, 時間変数と空間変数の微分階数のず

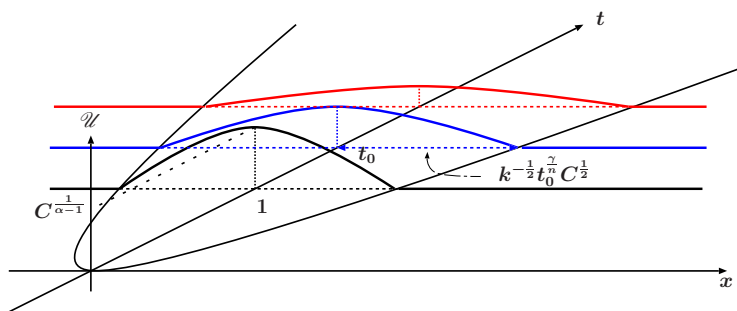


図 1: Barenblatt 解の模式図

れがない楕円型方程式に対する Hölder 評価の方がわかりやすい. 楕円型方程式に対する Hölder 評価 (より一般に Schauder 評価) とその応用については Gilbarg-Trudinger[9, Chapter 2-6] を参照せよ.

§2. 主定理

2.1. 特殊解 (Barenblatt 解)

(1.1) で $f \equiv 0$ とした, Porous Medium 方程式

$$(2.1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = 0, & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

について考える. $u = 0$ で拡散係数が消えていることから, Laplacian の持つ平滑化効果が消えることがわかる. では, 等高面 $\{u = 0\}$ のまわりで, 解 u はどのように振る舞っているのだろうか. この問いに答えるために, (2.1) の特殊解である Barenblatt 解

$$\mathcal{U}(t, x) = t^{-\frac{n}{\sigma}} U\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\sigma}}}\right), \quad U(y) = \left(C - \frac{\alpha - 1}{2\alpha\sigma} |y|^2\right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \sigma = n(\alpha - 1) + 2, \quad C > 0$$

を考える (cf. Vázquez [18, §4.4]). ここで $a \in \mathbb{R}$ に対して, $a_+ = \max\{a, 0\}$ であり, 定数 $C > 0$ は $\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{U}(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ をみたすようにとる (実は, $\|\mathcal{U}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{U}(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ がわかる). Barenblatt 解は (2.1) の第 1 式を満たすことが直接計算することにより確かめられる. Barenblatt 解の形状を模式的に表したのが, 図 1 である.

Barenblatt 解の台の境界で解は滑らかでないことがわかる. 従って, 熱方程式の場合とは異なり, (1.1) の弱解が滑らかになることは期待できない. さらに, Barenblatt 解は有限伝播性を持つ. すなわち, 初期値の台が有界ならば, 対応する解の台も有界となる. 従って, 非負解の上限を下限で上から評価する Harnack 不等式は熱方程式の解のように, 時間差を無条件にしては成り立たないことがわかる. Harnack 不等式で重要な点は, 解の下からの評価が得られることである. また, Hölder 連続性を導出するにも, 解の下からの評価が重要である. しかし, Barenblatt 解からもわかるように, (2.1) の解の下からの評価を導くには, 何かしらの条件をつけなければならない.

熱方程式の非負な弱優解に対しては, Moser の繰り返し法を用いて弱 Harnack 不等式を導出できる (Moser [14], 準線形方程式への一般化は Aronson-Serrin [2], Trudinger [16]). 弱 Harnack

不等式から有界な弱解の Hölder 連続性が導出できることが知られている. Moser の繰り返し法から弱 Harnack 不等式を導くには非退化性が本質的であるため, Moser の繰り返し法を用いても, Porous Medium 方程式の弱解から (Hölder 連続性を經由せずに) 弱 Harnack 不等式を導出することができない. そのために, Porous Medium 方程式の弱解に対して, 熱方程式の弱解のように, 弱 Harnack 不等式から Hölder 連続性を導出することはできない.

注意 2.1. 逆に Porous Medium 方程式の非負な弱解に対して, Hölder 連続性を (Harnack 不等式を用いずに) 示し, Hölder 連続性から (intrinsic な) Harnack 不等式を導出できることが知られている. 詳細は DiBenedetto [5, Chapter 6] を参照せよ.

2.2. 既知の結果

(2.1) の弱解に対する Hölder 連続性は Caffarelli-Friedman [3] によってはじめて証明された. 彼らは $\varepsilon > 0$ に対し, (2.1) の近似方程式

$$(2.1)_\varepsilon \quad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon^\alpha = 0, & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u_\varepsilon(0, x) = u_0(x) + \varepsilon > 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

を考察した. (2.1) $_\varepsilon$ の初期値は正となることから, 解 u_ε も正となることが知られている. 従って, 一様放物型方程式の理論が使えて, 近似解は滑らかとなる. Caffarelli-Friedman は Aronson-Benilan 評価 (cf. Aronson-Bénilan [1])

$$\Delta u_\varepsilon^{\alpha-1} \geq -\frac{C(n, \alpha)}{t}, \quad \partial_t u_\varepsilon \geq -\frac{C(n, \alpha)}{t} u_\varepsilon$$

と比較原理を用いることで, 解 u_ε の ε に依らない Hölder 連続性を導出することにより, (2.1) の解 u の Hölder 連続性を導出した. Caffarelli-Friedman の証明には, Aronson-Benilan 評価と比較原理が証明の鍵となっている. 我々の問題である, (1.1) の方程式に対して, Aronson-Benilan 評価と同等の評価が得られるかは一般にはわからない. また, f に u の非局所項が含まれている場合, 一般に比較定理が成り立たないことが知られている. そのため, 我々の問題に Caffarelli-Friedman の手法を適用するのは難しいと思われる.

他方, DiBenedetto-Friedman [6] は $p > 2$ に対して, 次の p -Laplace 発展方程式

$$(2.2) \quad \partial_t v - \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) = 0$$

の弱解の勾配が Hölder 連続になることを示した (より一般の p -Laplace 発展方程式については, Misawa [13]). DiBenedetto-Friedman の証明の鍵は, 解の局所的な性質をスケール変換を用いて考察する際に, 解の局所的な振動の情報をスケール変換に取り入れたことである. さらに, De Giorgi の繰り返し法が, 解の情報の入ったスケール変換に対しても機能することを示した.

ところで, 空間 1 次元の (2.2) の解 v に対し, $|\nabla v|^2$ は適当な $\alpha > 1$ に対して (2.1) の解となることがわかる. このことから, (2.1) の弱解に対しても, DiBenedetto-Friedman の手法を用いて, Hölder 連続性が導出できるのではと推測できる. 実際, DiBenedetto-Friedman は [6] において, (2.1) の弱解の Hölder 連続性が導出できると言及している. しかし, 外力のついた (1.1) の弱解に対する Hölder 連続性の証明は与えておらず, Hölder ノルムに対する評価も与えてはいない. そこで, 彼らの証明を修正し, 外力項 f が適当な可積分条件をみたせば (1.1) の弱解が Hölder 連続になることを示すとともに, 解 u の Hölder ノルムの陽的な表示を得た.

2.3. 主定理

主定理を述べるために、外力 f に次を仮定する: ある $p > n$ に対し、

$$(2.3) \quad f(t, x, u) \in L^\infty(0, \infty; L^p(\mathbb{R}^n))$$

を仮定する.

定理 2.2. u を有界で非負な (1.1) の弱解とする. $p > n$ に対して (2.3) を仮定する. このとき, 解 u は時空間一様に Hölder 連続となり, n, α, p にのみに依存する定数 $0 < \sigma < 1$, $C > 0$ が存在して

$$(2.4) \quad |u^\alpha(t, x) - u^\alpha(s, y)| \leq C(\|u^\alpha\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(0, \infty; L^p(\mathbb{R}^n))}) \\ \times (\|u\|_{L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} |t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma)$$

が任意の $(t, x), (s, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ.

注意 2.3. 外力 f の可積分性について考える. 今, 時間微分を無視することにより

$$-\Delta u^\alpha \cong -\operatorname{div} f$$

とみなす. さらに, 形式的に積分することにより

$$-\nabla u^\alpha \cong -f$$

となる. $\nabla u^\alpha \in L^p$ ゆえ, $u^\alpha \in W^{1,p}$ となり, Sobolev の埋め込みと $p > n$ から, $u^\alpha \in C^{0,\sigma}$ がわかる. 定理 2.2 の証明での外力 f の処理は, 以上の形式的議論の正当化に対応している.

注意 2.4. (2.4) 式に対し, $\alpha = 1$ の場合を考えると, $C|_{\alpha=1} \neq \infty$, $\sigma|_{\alpha=1} \neq 0$ となり, 熱方程式でよく知られている Hölder 評価 (Schauder 評価) が得られる.

§3. 主定理の証明の鍵

3.1. Intrinsic scaling(内在的スケール則)

主定理の証明の鍵である, intrinsic scaling について述べるために, 簡単のために $f \equiv 0$ として, u^α をあらためて u とおきかえた Porous Medium 方程式

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t u^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(t, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

について考察する. 方程式 (3.1) を不変にするスケール変換は, パラメータ $\rho, M > 0$ に対して

$$u_{\rho, M}(s, y) = \frac{1}{M} u(t, x), \quad t = \frac{\rho^2}{M^\beta} s, \quad x = \rho y, \quad \beta = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

で与えられることがわかる. パラメータ ρ に関しては, 熱方程式にもみられる, 放物型スケール則である. 注目すべきはパラメータ M に関するスケールである. M は解の高さをコントロールするパラメータとみることができる. 熱方程式の場合では, スケールに関わらずに, 解の高さをコント

ロールすることが可能であった(方程式が線形のため). しかし, Porous Medium 型非線形方程式では, 解の高さをコントロールするには, コントロールに応じて時間(ないしは空間)のスケールを変えなければならない.

そこで, パラメータ $\rho, M > 0$ に対して, 放物型円筒を

$$Q_{\rho, M}(t_0, x_0) = (t_0, x_0) + \left(-\frac{\rho^2}{M^\beta}, 0\right) \times \{|x| < \rho\}$$

とおき, $M > 0$ をコントロールすることにより, 解の高さを一定とみなすことを考える. 形式的には

$$(3.2) \quad M \cong \sup_{Q_{\rho, M}(t_0, x_0)} u$$

と考える. 右辺を定めるには M が決まっていなければならないため, この等号は一般には成り立たないが, 今, 等号が成立していると仮定すると, 解の局所的な高さの情報がスケールパラメータに含まれていることになる. このように, スケールパラメータに解の情報を含めることは intrinsic scaling と呼ばれる.

注意 3.1. Intrinsic scaling を用いた, 退化放物型方程式の弱解に対する Hölder 連続性の研究は, DiBenedetto-Friedman [6] による p -Laplace 放物型方程式への適用が最初と思われる. その後, 様々な研究者によって, 退化放物型方程式に対する弱解の局所有界性や (intrinsic)Harnack 評価が示された. Intrinsic scaling の方法に関しては, Urbano[17] や DiBenedetto[5] が詳しい.

注意 3.2. DiBenedetto-Friedman [6] はスケールパラメータを解の振動と関係づけて, intrinsic scaling の方法によって Hölder 連続性を導いているが, 本稿の (3.2) のように, 解の上限をスケールパラメータと関係づけた方がよいと思われる. なぜなら, 解の振動によって M を定めると, u が大きいところであっても, 振動は小さくなるため, 繰り返し法を適用するときに, 放物型円筒が時間方向に不必要に大きくなってしまふからである. u が大きいところでは, 拡散係数が消えないことから, 解は熱方程式に近い振る舞いをすると考えられるので, これは非効率的である. 他方, 解の上限によって M を定めると, u が大きいところでは, M は 0 にならないので, 放物型円筒が時間方向に大きくなることはない. そのため, 熱方程式に対する手法と同様の手法が適用できる.

注意 3.3. (3.2) は形式的な等号であるが,

$$\sup_{Q_{\rho, M}(t_0, x_0)} u \leq M \leq 4 \sup_{Q_{\rho, M}(t_0, x_0)} u$$

となるように $M > 0$ をとることで正当化することができる.

3.2. Hölder 連続性の導出

$(t_0, x_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ を固定する. $u(t_0, x_0) = 0$ のときに (t_0, x_0) のまわりでの Hölder 連続性の導出が最も困難なので, $u(t_0, x_0) = 0$ と考えてよい ($u(t_0, x_0) > 0$ でも以下の議論は成立する). $Q_{\rho, M}(t_0, x_0)$ を $Q_{\rho, M}$ と略記する. また, $\theta_0, \rho, M > 0$ に対して

$$Q_{\rho, M}^{\theta_0} = Q_{\rho, M}^{\theta_0}(t_0, x_0) := (t_0, x_0) + \left(-\frac{\theta_0 \rho^2}{2 M^\beta}, 0\right) \times \{|x| < \rho\}$$

とおく. さらに, 集合 A に対して, A 上の関数 f の振動を $\text{osc}_A f$ で表す. すなわち

$$\text{osc}_A f := \sup_A f - \inf_A f$$

である.

補題 3.4. $\sup_{Q_{\rho,M}} u \leq M \leq 4 \sup_{Q_{\rho,M}} u$ と $\frac{3}{4}\omega \leq \text{osc}_{Q_{\rho,M}} u \leq \omega$ を仮定する. このとき, n, α, p により依る定数 $0 < \theta_0, \delta, \eta < 1$ が存在して $\rho^{\frac{2n}{p^*}} \omega^{-2} \leq \delta \|f\|_{L^\infty L^p(Q_{\rho,M})}^{-2}$ をみたす $\rho > 0$ に対して

$$\text{osc}_{Q_{\frac{\rho}{2}, M}} u \leq \eta \omega$$

が成り立つ. ただし, $L^\infty L^p(Q_{\rho,M}) = L^\infty(t_0 - \frac{\rho^2}{M^\beta}, t_0; L^p(\{|x - x_0| < \rho^2\}))$ である.

補題 3.4 の η は $\eta > \frac{3}{4}$ としてよいことに注意しておく. 補題 3.4 を認めて, 解の Hölder 連続性を示す. そのために $M_0, \omega_0, \rho_0, c_0$ を

(3.3)

$$M_0 = \omega_0 := \sup_{(0, \infty) \times \mathbb{R}^n} u, \quad \rho_0^{\frac{2n}{p^*}} \omega_0^{-2} = \delta \|f\|_{L^\infty L^p((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)}^{-2}, \quad c_0 := \min \left\{ \eta^{\frac{p^*}{n}}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\theta_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

により定める. 次に $j \in \mathbb{N}$ に対して

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \omega_j &:= \eta \omega_{j-1} = \cdots = \eta^j \omega_0, & \rho_j &:= c_0 \rho_{j-1} = \cdots = c_0^j \rho_0, \\ \mu_j^+ &:= \sup_{Q_j} u, & \mu_j^- &:= \inf_{Q_j} u, \\ M_j &:= \max\{\mu_{j-1}^+, \omega_j\}, & Q_j &:= Q_{\rho_j, M_j} \end{aligned}$$

とおく. $M_j \leq \mu_{j-1}^+$ ととることが, intrinsic scaling によるものである. $M_j \leq \omega_j$ は繰り返し法が機能するために補助的に加えた仮定である.

補題 3.5. (3.3) と (3.4) の下で, $j \in \mathbb{N}$ に対し

(3.5)

$$\text{osc}_{Q_j} u \leq \omega_j$$

が成り立つ.

補題 3.5 から, $\eta = c^\sigma$ ととることにより, (t_0, x_0) のまわりでの解の Hölder 連続性が示せる. (3.3) の ω_0 と ρ_0 の関係を用いることで, 定理 2.2 の Hölder 評価が得られる. $j = 0, 1, 2$ に対して, 放物型円筒 Q_j の取り方を示したのが, 図 2 の左の図である. intrinsic scaling を用いたために, 放物型円筒の時間方向の長さや空間方向の長さの 2 乗の比が変化していることに注意する. 特に, $u(t_0, x_0) = 0$ ならば, $j \rightarrow \infty$ としたとき, $M_j \rightarrow 0$ となる. 従って, 縦軸を時間方向, 横軸を空間方向としたときに, 放物型円筒は j を大きくするにつれて, 縦に長くなる. なお, 退化が起こらない $\alpha = 1$ の場合 (熱方程式の場合) に対応する放物型円筒の取り方は図 2 の右の図である. intrinsic scaling を用いないので, 放物型円筒の時間方向の長さや空間方向の長さの 2 乗の比は一定に取れる.

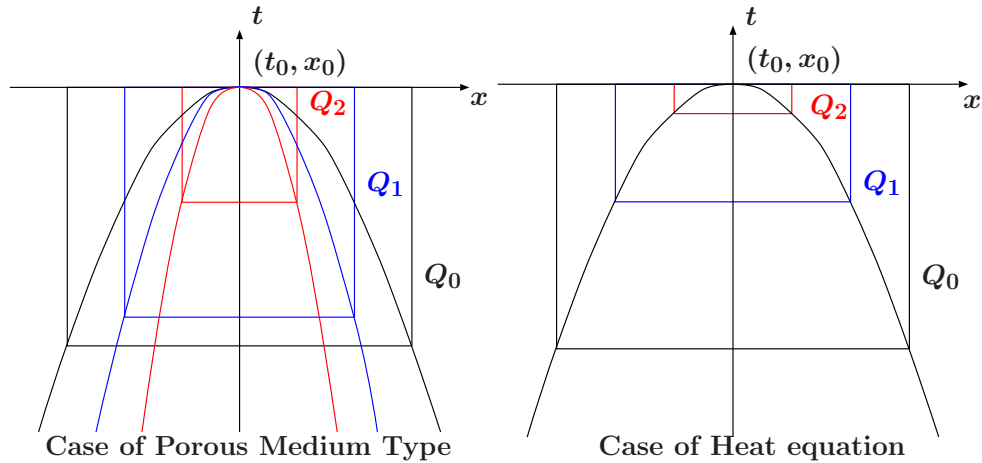


図 2: 放物型円筒の取り方 (左は $\alpha > 1$ の場合, 右は $\alpha = 1$ の場合)

補題 3.5 の証明. 帰納法によって示す. $k \geq 2$ に対して, $j \leq k$ で (3.5) が成り立つことを仮定して $j = k + 1$ で (3.5) が成り立つことのみ示す ($j = 1$ について成り立つことは, 自明ではないが, 以下の方法と同様にして示すことができる). そのために

$$(3.6) \quad \mu_{k-1}^+ \leq \max \left\{ \frac{3}{2\eta} \omega_k, 3\mu_k^+ \right\}$$

を示す. $\mu_{k-1}^- \leq \frac{1}{3}\mu_{k-1}^+$ のときは, $j = k - 1$ に対する仮定から

$$\mu_{k-1}^+ \leq \mu_{k-1}^+ - \mu_{k-1}^- + \mu_{k-1}^- \leq \omega_{k-1} + \frac{1}{3}\mu_{k-1}^+$$

より, $\mu_{k-1}^+ \leq \frac{3}{2}\omega_{k-1} = \frac{3}{2\eta}\omega_k$ となるから (3.6) が成り立つ.

$\mu_{k-1}^- > \frac{1}{3}\mu_{k-1}^+$ のときは,

$$\mu_{k-1}^+ < 3\mu_{k-1}^- \leq 3\mu_k^- \leq 3\mu_k^+$$

より (3.6) が示される.

(3.5) を $j = k + 1$ で示すために場合わけをする.

Case 1. $\frac{3}{4}\omega_k \leq \text{osc}_{Q_k} u \leq \omega_k$ の場合を考える. $\omega_k \leq \frac{4}{3}\mu_k^+$ だから

$$\mu_{k-1}^+ \leq \max \left\{ \frac{3}{2\eta} \omega_k, 3\mu_k^+ \right\} \leq \max \left\{ \frac{2}{\eta} \mu_k^+, 3\mu_k^+ \right\} \leq 3\mu_k^+$$

より

$$M_k \leq \max \left\{ \frac{4}{3}\mu_k^+, 3\mu_k^+ \right\} \leq 3\mu_k^+$$

となる. 補題 3.4 が適用できて,

$$\text{osc}_{Q_{\frac{\rho_k}{2}, M_k}^{\theta_0}} u \leq \eta \omega_k$$

が成り立つ.

$$\frac{M_{k+1}}{M_k} \geq \frac{\mu_k^+}{3\mu_k^+} = \frac{1}{3} \text{ and } c_0 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

に注意すれば $Q_{k+1} \subset Q_{\frac{\rho_k}{2}, M_k}^{\theta_0}$ がわかるので, (3.5) が $j = k + 1$ で成り立つ.

Case 2. $\text{osc}_{Q_k} u \leq \frac{3}{4}\omega_k$ の場合を考える. $Q_{k+1} \subset Q_k$ を示すために, さらに場合わけを行う.

Subcase 1. $M_k = \omega_k$ のときは,

$$\frac{M_{k+1}}{M_k} = \frac{M_{k+1}}{\omega_k} \geq \frac{\eta\omega_k}{\omega_k} = \eta \geq \frac{3}{4}$$

が成り立つ. $c_0 \leq (\frac{3}{4})^{\frac{\beta}{2}}$ だったことから, $Q_{k+1} \subset Q_k$ がわかる.

Subcase 2. $M_k = \mu_{k-1}^+$ のときは, (3.6) から

$$\begin{aligned} \frac{M_{k+1}}{M_k} &= \frac{M_{k+1}}{\mu_{k-1}^+} \geq \frac{M_{k+1}}{\max\left\{\frac{3}{2\eta}\omega_k, 3\mu_k^+\right\}} \\ &\geq \begin{cases} \frac{2\eta^2}{3} \geq \frac{3}{8} & \text{if } \frac{3}{2\eta}\omega_k \geq 3\mu_k^+, \\ \frac{1}{3} & \text{if } \frac{3}{2\eta}\omega_k \leq 3\mu_k^+, \end{cases} \\ &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

が成り立つ. $c_0 \leq (\frac{1}{3})^{\frac{\beta}{2}}$ だったことから, $Q_{k+1} \subset Q_k$ が成り立つ.

どちらの場合でも, $Q_{k+1} \subset Q_k$ が成り立つので $\frac{3}{4}\omega_k \leq \omega_{k+1}$ に注意すれば (3.5) が $j = k + 1$ で成り立つ. \square

最後に補題 3.4 の証明について言及する. 証明は DiBenedetto-Friedman [6] による Porous Medium 方程式の弱解に対する Hölder 連続性の導出方法に従う (実はこの補題の証明が定理の証明で最も計算を必要とする). まず, $k > 0$ に対して切り落とし関数 $(u - k)_+$, $-(k - u)_+$ をテスト関数にとることにより, 解の劣等高面集合, 優等高面集合に対する Caccioppoli 評価を導く. 次に Bernstein 評価と Sobolev-Poincaré 不等式を組み合わせて解の先験的局所有界性を示す. そして, De Giorgi の繰り返し法により, Alternative を構成することにより, 補題 3.4 を示す. この手法は放物型 De Giorgi 空間の拡張や (古典的な放物型 De Giorgi 空間については Ladyženskaja-Solonnikov-Ural'ceva [10, Chapter II §7] を参照), 退化放物型方程式の弱解の正則性理論に応用されている.

参考文献

- [1] Aronson, D. G. and Bénilan, P., *Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbf{R}^N* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **288**(1979), A103–A105.
- [2] Aronson, D. G. and Serrin, J., *Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **25**(1967), 81–122.

- [3] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., *Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium*, Indiana Univ. Math. J., **29**(1980), 361–391.
- [4] Carrillo, J. A. and Toscani, G., *Asymptotic L^1 -decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, Indiana Univ. Math. J., **49**(2000), 113–142.
- [5] DiBenedetto, E., “Degenerate parabolic equations,” Universitext, Springer-Verlag, 1993.
- [6] DiBenedetto, E. and Friedman, A., *Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems*, J. Reine Angew. Math., **357**(1985), 1–22.
- [7] Evans, L. C. and Gariepy, R. F., “Measure theory and fine properties of functions,” CRC Press, 1992.
- [8] Giga, Y. and Kohn, R. V., *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math., **38**(1985), 297–319.
- [9] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., “Elliptic partial differential equations of second order,” Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag, 2001.
- [10] Ladyženskaja, O. A., Solonnikov, V. A. and Ural’ceva, N. N., “Linear and quasilinear equations of parabolic type,” American Mathematical Society, 1967.
- [11] Lions, J.-L., “Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,” Dunod, 1969.
- [12] Luckhaus, S. and Sugiyama, Y., *Asymptotic profile with the optimal convergence rate for a parabolic equation of chemotaxis in super-critical cases*, Indiana Univ. Math. J., **56**(2007), 1279–1297.
- [13] Misawa, M., *Local Hölder regularity of gradients for evolutionary p -Laplacian systems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **181**(2002), 389–405.
- [14] Moser, J., *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **17**(1964), 101–134.
- [15] Ogawa, T., *Asymptotic stability of a decaying solution to the Keller-Segel system of degenerate type*, Differential Integral Equations, **21**(2008), 1113–1154.
- [16] Trudinger, N. S., *Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **21**(1968), 205–226.
- [17] Urbano, J. M., “The method of intrinsic scaling,” Lecture Notes in Mathematics **1930**, Springer-Verlag, 2008.
- [18] Vázquez, J. L., “The porous medium equation,” Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007.
- [19] Wu, Z., Yin, J. and Wang, C. , “Elliptic & parabolic equations,” World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.

980-8578

宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3
東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
E-mail: sa5m16@math.tohoku.ac.jp