第 32 回 発展方程式 若手セミナー 報告集
(2010), pp.243–250

退化 Keller-Segel 系の大域解の漸近挙動

水野 将司
（東北大学 大学院理学研究科 数学専攻）

§1. 序

次の退化 Keller-Segel 方程式系の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \operatorname{div}(u\nabla\psi) = 0, & t>0\,,\, x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi + \psi = u, & t>0\,,\, x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし, $u=u(t,x), \psi=\psi(t,x)$ は未知関数とし, 初期値 $u_0=u_0(x)$ は与えられた非負関数とする. $\alpha=1$ のときの方程式系 (1.1) は, Keller-Segel [4] によって提唱された, 細胞性粘菌の運動を記述する放物型-放物型方程式系を誘引化学物質の拡散速度が十分に速いとみなして緩和極限をとることにより導出される. $\alpha>1$ のとき, 細胞性粘菌の拡散がそれ自身の密度に依存するモデルとなるとともに, Nagai-Mimura [7] により, 人口分布のモデルとして研究されている. 本稿では, $\alpha>1$ の場合の方程式 (1.1) の解の時刻無限大での漸近挙動を考える. このとき, $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1}\nabla u)$ であるが, $\alpha>1$ であることから, $u=0$ のときに, $u^{\alpha-1}=0$ となる. このように, 発散形式で書いたときに, ∇u の係数行列の固有値が 0 になりうる放物型方程式を退化放物型方程式という. $u=0$ となる点において, 方程式 (1.1) は放物型方程式の特性を失い, 解は一般に滑らかにならない. 実際, 退化放物型方程式の典型例である, porous medium 方程式

$$\partial_t w - \Delta w^\alpha = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

に対して, Barenblatt 解

$$\mathscr{U}(t,x) = (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}}\left(A - \frac{\alpha-1}{2\alpha}\left(\frac{|x|}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}}\right)^2\right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}} =: (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}}\mathscr{V}\left(\frac{|x|}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}}\right) \tag{1.3}$$

は, (1.2) を超関数の意味でみたす (図 1 を参照). ただし, $A>0$ は任意定数, $\sigma=n(\alpha-1)+2$, $(f(x))_+ := \max\{f(x),0\}$ とする. このことから, 一般に, 退化放物型方程式は古典解が存在するとは限らない. そこで, 方程式系 (1.1) の弱解を定義する.

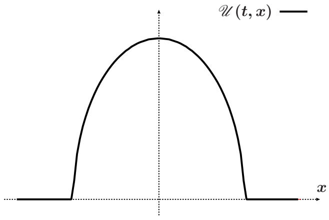

図 1: t を固定したときの, Barenblatt 解の形状

定義 1.1. 非負の初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ に対し, (u,ψ) が (1.1) の弱解であるとは, $T>0$ が存在して, 次の 3 条件をみたすときをいう:

1. 殆どすべての $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ に対して, $u(t,x) \geq 0$;
2. $u \in L^\infty(0,T\,;L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\alpha(\mathbb{R}^n))$ かつ $\nabla u^{\alpha-\frac{1}{2}} \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$;
3. u は (1.1) を超関数の意味でみたす. すなわち任意の $\phi \in C^1([0,T)\,;C^1(\mathbb{R}^n))$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u(t)\phi(t)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_0\phi(0)\,dx \\ = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n}\Big\{u(\tau)\partial_t\phi(\tau) - \nabla u^\alpha(\tau)\cdot\nabla\phi(\tau) + u(\tau)\nabla\psi(\tau)\cdot\nabla\phi(\tau)\Big\}\,dx\end{aligned}$$

が殆どすべての $0<t<T$ に対して成り立つ. ここで, $\psi = (-\Delta+1)^{-1}u = \mathscr{F}^{-1}[(|\xi|^2+1)^{-1}\mathscr{F}u]$ は Bessel ポテンシャルである.

方程式系 (1.1) の局所解はよく知られている. 大域解の存在, 非存在は Sugiyama [12], Sugiyama-Kunii [13] によって示された. 本稿に必要な結果についてのみ述べる.

命題 1.2 (Sugiyama [12], Sugiyama-Kunii [13])**.** $n \geq 3$, $1 < \alpha \leq 2 - \frac{2}{n}$ とし, 初期値 u_0 は適当な意味で十分に小さいとする. このとき, (1.1) には, 減衰する大域解 (u,ψ) が存在する.

以下, $n\geq 3$, $1<\alpha\leq 2-\frac{2}{n}$ に対して, 減衰する大域解 u の時刻無限大に対する漸近挙動を考える. 形式的には, 十分大きな時刻 t に対して u が小さくなることから $\nabla\psi, \Delta\psi$ も小さくなると考えられるため, $\mathrm{div}(u\nabla\psi)$ も小さくなると推測できる. 従って, (1.1) の減衰する解 u は時刻無限大で porous medium 方程式の解のように振る舞うと考えられる. このことは, Luckhaus-Sugiyama [6] によって数学的に正当化された. すなわち, $\mathscr{U}$ を porous medium 方程式の Barenblatt 解 (1.3) とし, $\|\mathscr{U}(0)\|_1 = \|u_0\|_1$ となるように $A>0$ を定めるとき, $\|u(t)-\mathscr{U}(t)\|_1$ が $t\to\infty$ で 0 に収束することを示した. なお, $\|u(t)\|_1 = \|u_0\|_1$ となることから (このことは, 形式的には方程式 (1.1) を x で積分して, 発散定理を用いることでわかる), $\|u(t)\|_1$ は $t\to\infty$ で減衰しないことに注意する. この結果により, $u(t)$ は L^1 ノルムを保存しながら, Barenblatt 解 $\mathscr{U}(t)$ のように減衰することがわかる. 次に, 剰余項である $u(t)-\mathscr{U}(t)$ がどのような挙動をしているかを考える. Ogawa [9] は, $1<\alpha<2-\frac{2}{n}$ のときに $C,\nu>0$ が存在して, $\|u(t)-\mathscr{U}(t)\|_1 \leq C(1+t)^{-\nu}$ とできる, すなわち, 剰余項が一様に t の負巾で評価できることを示した. $\alpha = 2-\frac{2}{n}$ のときは, 非線形性が臨界的となるために, 剰余項の漸近評価が示されていなかった. 我々は, 非線形性が臨界的である, $\alpha = 2-\frac{2}{n}$ のときに, 剰余項の一様漸近評価を示した.

定理 1.3 (小川卓克教授との共同研究)**.** $n \geq 3$, $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ とする．ある $a > n$ に対して, 十分小さな初期値 u_0 は $|x|^a u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ をみたすとする．このとき, $C, \nu > 0$ が存在して

$$\|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_1 \leq C(1+t)^{-\nu}, \quad t > 0$$

が成り立つ． ただし, $\mathscr{U}$ は, $\|\mathscr{U}(0)\|_1 = \|u_0\|_1$ をみたす porous medium 方程式の Barenblatt 解 (1.3) である.

定理 1.3 により, 非線形性が臨界的であっても, 初期値に高次モーメントの有界性を課すことにより, 時刻無限大において剰余項が Barenblatt 解より代数的に早く減衰していることがわかる. 例えば, コンパクトな台を持つ初期値に対して, 剰余項の一様な減衰評価が得られる.

注意 1.4. Luckhaus-Sugiyama [6] により

$$(1+t)^{\frac{n}{\sigma}} \|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_\infty \to 0, \quad t \to \infty$$

が得られている. この結果から $1 < p < \infty$ に対して

$$\begin{aligned}(1+t)^{\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_p &\leq ((1+t)^{\frac{n}{\sigma}} \|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_\infty)^{1-\frac{1}{p}} \|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_1^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{\nu}{p}},\end{aligned}$$

すなわち

$$\|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})-\frac{\nu}{p}}$$

が従う. Barenblatt 解に対して, 変数変換により

$$\|\mathscr{U}(t)\|_p = (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})} \|\mathscr{V}\|_p$$

となることに注意すると, $1 \leq p < \infty$ に対しても時刻無限大において, 剰余項が Barenblatt 解より代数的に早く減衰していることがわかる.

注意 1.5. 時刻無限大における漸近挙動, 特に漸近形を求めることは, $t = \infty$ での Taylor 展開とみなすことができる. $\alpha = 1$ のときは, 解を熱核を用いて表現できるため, 熱核の Taylor 展開を計算することにより, より高次の漸近形を求めることができる. $\alpha > 1$ のときは, 解の表示が知られていないため, 高次の漸近形は求められていない.

§2. 解の正則性

この節では, 形式的な議論のもとで, なぜ定理が成り立つのかを説明する. 定理を示すために, (u, ψ) の前方自己相似変換 (v, ψ) を考える:

$$s = \frac{1}{\sigma}\log(1+\sigma t), \qquad y = \frac{x}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}},$$
$$v(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}} u(t,x), \qquad \phi(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}} \psi(t,x).$$

前方自己相似変換は, 方程式の左辺の構造を保ちながら, 解の形状を相似変換している (図 2 を参照). 実際, (v, ψ) は, 次の方程式をみたす:

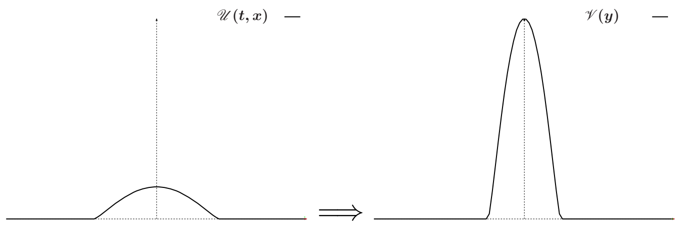

図 2: 前方自己相似変換による, Barenblatt 解の形状の変化

$$
\begin{cases}
\partial_s v - \Delta_y v^\alpha = \mathrm{div}_y(yv - e^{-\kappa s} v \nabla_y \phi), & s > 0\,,\ y \in \mathbb{R}^n, \\
-e^{-2s}\Delta_y \phi + \phi = v, & s > 0\,,\ y \in \mathbb{R}^n, \\
v(0,y) = u_0(y) \geq 0, & y \in \mathbb{R}^n,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

ただし, $\kappa = n(2-\alpha)$ である. また, 積分の変数変換により

$$
\|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_{L^1_x(\mathbb{R}^n)} = \|v(s) - \mathscr{V}\|_{L^1_y(\mathbb{R}^n)}
$$

となることから, v が $\mathscr{V}$ に収束する速さを求めることで, 定理 1.3 が示せる. すなわち, 解の漸近挙動を考察する問題が前方自己相似変換を通して, 時刻無限大での自己相似解の収束の問題におきかわる. ここで, (2.1) を $\phi = (-e^{-2s}\Delta_y + 1)^{-1} v$ を用いて

$$
\partial_s v - \Delta_y v^\alpha = \mathrm{div}_y(yv - e^{-\kappa s} v \nabla_y (-e^{-2s}\Delta_y + 1)^{-1} v)
$$

と書き換えてみると, $-\mathrm{div}(e^{-\kappa s} v \nabla_y (-e^{-2s}\Delta_y + 1)^{-1} v)$ が時刻無限大で小さくなることを示すことで $-\mathrm{div}(u\nabla\psi)$ が小さくなることを正当化できる. そこで, 形式的に $(-e^{-2s}\Delta_y + 1)^{-1}$ を分数の形で書き, 微分が最も高い項を考えてみると

$$
\mathrm{div}(e^{-\kappa s} v \nabla_y (-e^{-2s}\Delta_y + 1)^{-1} v) \cong e^{-(\kappa-2)s} v \frac{-e^{-2s}\Delta_y}{-e^{-2s}\Delta_y + 1} v
\tag{2.2}
$$

となるため, 作用素 $\frac{-e^{-2s}\Delta_y}{-e^{-2s}\Delta_y + 1}$ は (Δ を変数と思うことにすると)s について一様に有界となることがわかる. また, 前方自己相似変換の性質から, v は有界となるが, 減衰はしない (減衰する解 u に対して, 前方自己相似変換を通して L^∞ ノルムを正規化させていると考えればよい). $\alpha < 2 - \frac{2}{n}$ のときは, $\kappa > 2$ となることより, $e^{-(\kappa-2)s}$ の項から非線形項が時刻無限大で小さくなることがわかり, 剰余項の漸近評価が従う. これに対し, $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ のときは, $\kappa = 2$ となり $e^{-(\kappa-2)s} = 1$ となるため, $e^{-(\kappa-2)s}$ の項からは, 解の減衰評価が得られない. この困難を克服するために, v に関する一様な Hölder 連続性を用いる. すなわち

補題 2.1. 定理 1.3 の仮定のもとで, v は γ 次の一様 Hölder 連続になる.

補題 2.1 は, 初期値の高次モーメントの有界性を用いて, $yv - e^{-\kappa s} v \nabla_y \phi$ が十分な可積分性を持つことにより示される. 実際, $e^{-\kappa s} v \nabla_y \phi$ は有界となるため, yv の可積分性についてのみ考えればよい. 形式的に方程式 (2.1) に $|y|^a$ を掛けて空間変数について積分すると

$$
\frac{\partial}{\partial s}\int_{\mathbb{R}^n} v|y|^a\,dx + a\int_{\mathbb{R}^n} v|y|^a\,dx = a(a+n-2)\int_{\mathbb{R}^n} v^\alpha |y|^{a-2}\,dx + ae^{-\kappa s}\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{a-2} v \nabla\phi \cdot y\,dx
$$

となるため, Gronwall の不等式を用いることで, $v|y|^a \in L^\infty(0,\infty;L^1(\mathbb{R}^n))$ となることがわかる. このことにより, $yv \in L^\infty(0,\infty;L^a(\mathbb{R}^n))$ がわかる. 補題 2.1 を示すために, porous medium 方程式に対する先験 Hölder 評価を用いる:

補題 2.2 (porous medium 方程式に対する先験 Hölder 評価 [8, 14])**.** $D \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とし, $p > n$ に対して, $f \in L^\infty(0,\infty;\,L^p(D))$ を仮定する. u を次の方程式の有界で非負な弱解とする:

$$\partial_t u - \Delta u^\alpha = \mathrm{div} f \quad t>0,\ x \in D.$$

このとき, 解 u は Hölder 連続となり, $D' \Subset D$ に対して, n, α, p, D' にのみに依存する定数 $0 < \gamma < 1$, $C > 0$ が存在して

$$|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \le C(\|u^\alpha\|_{L^\infty((0,\infty)\times D)} + \|f\|_{L^\infty(0,\infty\,;\,L^p(D))}) \times (\|u\|^{\frac{1}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times D)}|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma) \tag{2.3}$$

が任意の (t,x), $(s,y) \in (1,\infty)\times D'$ に対して成り立つ.

$f = yv - e^{-\kappa s} v \nabla_y \phi$ として, 補題 2.2 を用いることで, v が時空間一様に Hölder 連続となることが従う. Hölder 連続性は分数階の微分が可能となることに対応している. 実際 $\gamma' < \gamma$ に対して, $|\nabla|^{\gamma'} v = \mathscr{F}^{-1}|\xi|^{\gamma'}\mathscr{F} v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ となる. $-\Delta = \mathscr{F}^{-1}|\xi|^2\mathscr{F}$ が正定値作用素であることに注意すると, (2.3) はさらに形式的に議論をすすめることにより

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(e^{-\kappa s} v \nabla_y(-e^{-2s}\Delta_y + 1)v) &\cong e^{-(\kappa-2)s} v \frac{-e^{-2s}\Delta_y}{-e^{-2s}\Delta_y + 1} v \\ &\cong e^{-(\kappa-2+\gamma')s} v \frac{-e^{-(2-\gamma')s}|\nabla|^{2-\gamma'}}{-e^{-2s}|\nabla|^2+1}|\nabla|^{\gamma'} v \end{aligned} \tag{2.4}$$

と書き換えることができる. ここで, $\frac{-e^{-(2-\gamma')s}|\nabla|^{2-\gamma'}}{-e^{-2s}|\nabla|^2+1}$ が有界となることに注意すると, $\kappa = 2$ のときに, $e^{-(\kappa-2+\gamma')s}$ から減衰が得られることがわかる. これにより, 形式的にではあるが, $-\mathrm{div}(e^{-\kappa s} v \nabla_y(-e^{-2s}\Delta_y+1)^{-1}v)$ が時刻無限大で小さくなることがわかった.

そこで, 方程式 (2.1) を

$$\partial_s v - \mathrm{div}\Big(v\nabla_y\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}v^{\alpha-1} + \frac{1}{2}|y|^2 - e^{-\kappa s}\phi\Big)\Big) = 0 \tag{2.5}$$

とかきかえて, エントロピー汎関数 J を

$$J(v(s)) := \int_{\mathbb{R}^n} v(s)\left|\nabla\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}v^{\alpha-1}(s) + \frac{|y|^2}{2}\right)\right|^2 dy$$

とおく. 方程式 (2.5) に $\frac{\alpha}{\alpha-1}v^{\alpha-1}(s) + \frac{|y|^2}{2}$ をかけて時空間で積分すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n} v^\alpha(s)\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|y|^2 v(s)\,dy + \int_0^s J(v(\tau))\,d\tau \\ &\qquad = \frac{1}{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n} v^\alpha(0)\,dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|y|^2 v(0)\,dy + R(s) \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる．ここで, $R(s)$ は $-e^{-\kappa s}\phi$ から得られる誤差項であり, $s\to\infty$ で十分に小さくなる項である．評価式 (2.6) で $s\to 0$ とすることで, $J(v(s))\to 0$ が従う．このことから, 形式的には J を定める被積分関数 $\nabla(\frac{\alpha}{\alpha-1}v^{\alpha-1}(s)+\frac{|y|^2}{2})$ が 0 に収束する．従って, 微分が消えることから, ある定数 $A>0$ がとれて

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}v^{\alpha-1}(s)+\frac{|y|^2}{2}\to\frac{\alpha}{\alpha-1}A,\quad s\to\infty$$

となる．v について解き, 変数変換することにより

$$(1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}}u(t)\to\left(A-\frac{\alpha-1}{2\alpha}\left(\frac{|x|}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}}\right)^2\right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}},\quad t\to\infty$$

となることがわかり, u は Barenblatt 解 $\mathscr{U}$ に漸近することがわかる．

注意 2.3. 漸近解析を $t=\infty$ での Taylor 展開とみなせば, 時間変数に関する微分可能性を考える必要がある．方程式を用いることで, 時間変数に関する微分可能性は空間変数に関する微分可能性に置き換えることができるが, 方程式が退化しているため一般に微分可能性が成り立たない．そこで, 微分可能性を Hölder 連続性に置き換えることで, この問題を克服している．

注意 2.4. 初期値の高次モーメントの有界性は, 解の Hölder 連続性を導くために用いている．熱方程式に対する解の漸近展開から類推すると, 初期値のモーメントの有界性は 1 次でよいと思われる．エントロピー汎関数の評価 (2.6) から 2 次のモーメントの有界性は証明に本質的に用いているが, 初期値に対する高次モーメントの有界性が本質的であるか否かはわかっていない.

§3. 証明の概略

以下, $\alpha=2-\frac{2}{n}$ の場合のみを考える．定理 1.3 の厳密な証明は Carrillo-Toscani [2] によるエントロピー消散法を用いることによる．方程式に付随する修正エントロピー汎関数 I を

$$I(v(s)):=\int_{\mathbb{R}^n}v(s)\left|\nabla\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}v^{\alpha-1}(s)+\frac{|y|^2}{2}-e^{-2s}\phi(s)\right)\right|^2dy$$

により定義する．$I(v(s))$ の減衰評価を導くことで, $J(v(s))$ の減衰評価が従い, Carrillo-Toscani の手法によって定理が示される．そこで, $I(v(s))$ を時間微分すると, 形式的には

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}I(v(s))&=-2I(v(s))-2(\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^n}v^\alpha\Big|\mathrm{div}K(y,v,\phi)\Big|^2dy\\&\quad-2\int_{\mathbb{R}^n}v^\alpha\left|\nabla K(y,v,\phi)\right|^2dy+2e^{-2s}\int_{\mathbb{R}^n}v(D^2\phi K(y,v,\phi)\cdot K(y,v,\phi))\,dy\\&\quad+2e^{-2s}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}(vK(y,v,\phi))\partial_s\phi\,dy-4e^{-2s}\int_{\mathbb{R}^n}vK(y,v,\phi)\nabla\phi\,dy.\end{aligned}\tag{3.1}$$

が得られる．ただし, $D^2\phi$ は Hesse 行列,

$$K(y,v,\phi):=\nabla\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}v^{\alpha-1}(s)+\frac{|y|^2}{2}-e^{-2s}\phi(s)\right)$$

である (cf. Ogawa [9]). この形式計算は, $\varepsilon > 0$ に対し, 方程式 (2.1) を放物型正則化した問題

$$\begin{cases} \partial_s v_\varepsilon - \Delta_y (v_\varepsilon + \varepsilon)^\alpha = \mathrm{div}_y (y v_\varepsilon - e^{-\kappa s} v_\varepsilon \nabla_y \phi_\varepsilon), & s > 0\,,\, y \in \mathbb{R}^n, \\ -e^{-2s} \Delta_y \phi_\varepsilon + \phi_\varepsilon = v_\varepsilon, & s > 0\,,\, y \in \mathbb{R}^n, \\ v_\varepsilon(0, y) = u_0(y) \geq 0, & y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

を考えて, 空間遠方の可積分性を考慮するためにカットオフ関数を用いることで正当化できる. (3.1) の右辺の最初の 3 項は I を減衰させる効果を持つ. 従って, 右辺の最後の 3 項を評価することが鍵となるが, 右辺の第 4 項の ϕ に関する空間 2 階微分を評価することが最も困難となる. そこで, 次の Brézis-Gallouet 型不等式を用いる:

補題 3.1 (Brézis-Gallouet, Kozono-Ogawa-Taniuchi, Ogawa-Taniuchi [1, 5, 10])**.** n にのみ依る定数 $C > 0$ が存在して, $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^\gamma(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|f\|_\infty \leq C\,(1 + \|f\|_{\mathrm{BMO}} \log{(e + \|f\|_2 + \|f\|_{C^\gamma})}) \tag{3.2}$$

が成り立つ. ただし, $B_r(x)$ を中心 x, 半径 r の開球とするとき

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f - (f)_{B_r(x)}|\, dy, \quad (f)_{B_r(x)} := \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f\, dy$$

である.

補題 3.1 は, 有界平均振動の関数と有界な関数の差を定量的に表した不等式といえる. そこで, $f = D^2\phi$ として, (3.2) を用いると

$$\|D^2\phi\|_\infty \leq C \left(1 + \|D^2\phi\|_{\mathrm{BMO}} \log \left(e + \|D^2\phi\|_2 + \|D^2\phi\|_{C^\gamma}\right)\right)$$

となる. $\log\left(e + \|D^2\phi\|_2 + \|D^2\phi\|_{C^\gamma}\right)$ は (2.1) の第二方程式に Calderon-Zygmund の不等式と Schauder 評価 (cf. Gilbarg-Trudinger [3]) を用いることにより, s についてたかだか多項式の増大度を持つことがわかる. 以下, $\|D^2\phi\|_{\mathrm{BMO}}$ の評価を考える. Calderon-Zygmund の不等式から

$$\|D^2\phi\|_{\mathrm{BMO}} \leq C\|-\Delta\phi\|_{\mathrm{BMO}} \leq C\|-\Delta(-e^{-2s}\Delta + 1)^{-1} v\|_{\mathrm{BMO}}.$$

となるが, このときに右辺を定める Fourier 掛け算作用素を考えると

$$\frac{|\xi|^2}{e^{-2s}|\xi|^2 + 1} = \frac{e^{2s}|\xi|^{2-\gamma'}}{|\xi|^2 + e^{2s}} |\xi|^{\gamma'} = e^{(2-\gamma')s} \frac{e^{\gamma' s}|\xi|^{2-\gamma'}}{|\xi|^2 + e^{2s}} |\xi|^{\gamma'}$$

となる. 作用素 $e^{\gamma' s}|\nabla|^{2-\gamma'}(-e^{-2s}\Delta + 1)^{-1}$ に対応する Fourier 掛け算作用素は Hölmander 条件をみたすことがわかり, BMO 空間上の有界作用素となることがわかる (cf. Stein [11, p.155, §4.1]). つまり, 形式的な計算 (2.2) や (2.4) は Fourier 掛け算作用素の BMO 有界性を通して正当化される. 作用素 $e^{\gamma' s}|\nabla|^{2-\gamma'}(-e^{-2s}\Delta + 1)^{-1}$ の BMO 有界性から

$$\|D^2\phi\|_{\mathrm{BMO}} \leq C e^{(2-\gamma')s} \||\nabla|^{\gamma'} v\|_{\mathrm{BMO}}.$$

となるが, 一様 Hölder 連続性 補題 2.1 により, $\||\nabla|^\gamma v\|_{\mathrm{BMO}}$ が s に関して一様に有界となることがわかる. 従って,

$$\begin{aligned} e^{-2s} \int_{\mathbb{R}^n} v(D^2\phi K(y, v, \phi) \cdot K(y, v, \phi))\, dy &\leq e^{-2s} \|D^2\phi(s)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} v|K(y, v, \phi)|^2\, dx \\ &\leq C e^{-\gamma' s} I(v(s)) \end{aligned}$$

が従う. 残りの 2 項についても同様に評価することができて,

$$\frac{d}{ds}I(v(s)) \leq -\nu I(v(s)) + Ce^{-2s} \tag{3.3}$$

なる $\nu > 0$ がとれる. (3.3) から, Gronwall の不等式により

$$I(v(s)) \leq Ce^{-\nu s}$$

が従い. 修正 Entropy 汎関数が指数減衰することがわかる.

注意 3.2. 前方自己相似変換 v の Hölder 指数が大きくとれれば, 剰余項に対するよりよい減衰評価が得られる. 補題 2.2 において, γ の定量的な評価は, $f \equiv 0$ かつ $n = 1$ のときしか知られていない. 特に $n \geq 2$ における porous medium 方程式の解の Hölder 最良指数は未解決問題である.

参考文献

[1] Brézis, H. and Gallouet, T., *Nonlinear Schrödinger evolution equations*, Nonlinear Anal. **4** (1980), 677-681.

[2] Carrillo, J. A. and Toscani, G., *Asymptotic L^1-decay of solutions of the porous medium equation to self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 113–142.

[3] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag, 2001.

[4] Keller, E. F. and Segel, L. A., *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability* 1*, Journal of Theoretical Biology **26** (1970), 399–415.

[5] Kozono, H., Ogawa, T. and Taniuchi, Y., *The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations*, Math. Z., **242** (2002), 251–278.

[6] Luckhaus, S and Sugiyama, Y., *Asymptotic profile with the optimal convergence rate for a parabolic equation of chemotaxis in super-critical cases*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), 1279–1297.

[7] Nagai, T. and Mimura, M., *Some nonlinear degenerate diffusion equations related to population dynamics*, J. Math. Soc. Japan **35** (1983), 539–562.

[8] Mizuno, M. and Ogawa, T., *Hölder continuity for some degenerate parabolic equation and its application*, in RIMS Kôkyûroku, Nonlinear evolution equations and mathematical modeling, **1693** (2010), 45–56.

[9] Ogawa, T., *Asymptotic stability of a decaying solution to the Keller-Segel system of degenerate type*, Differential Integral Equations **21** (2008), 1113–1154.

[10] Ogawa, T. and Taniuchi, Y., *The limiting uniqueness criterion by vorticity for Navier-Stokes equations in Besov spaces*, Tohoku Math. J. (2), **56** (2004), 65–77.

[11] Stein, E. M., *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series **43**, Princeton University Press, 1993.

[12] Sugiyama, Y., *Global existence in sub-critical cases and finite time blow-up in super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems*, Differential Integral Equations **19** (2006), 841–876.

[13] Sugiyama, Y. and Kunii, H., *Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations **227** (2006), 333–364.

[14] 水野 将司, 「Porous Media 型非線形拡散方程式の解の Hölder 連続性について」, 第 31 回発展方程式若手セミナー報告集 (2010), 289–298 (cf. `http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa5m16/`).

980-8578
宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6 番 3 号
E-mail: `sa5m16@math.tohoku.ac.jp`