

# 平均曲率流方程式に由来する 半線形放物型方程式の解に対する正則性評価について

水野 将司 (東北大学大学院 理学研究科 D1)

$n \geq 2, 0 < \varepsilon \ll 1$  に対して

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \frac{u}{\varepsilon} (|\nabla u|^2 - 1) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の解  $u = u(t, x)$  の内部正則性について考察する.

Bence-Merriman-Osher は 1992 年に, 平均曲率流方程式の解を, 熱方程式を用いた簡明なアルゴリズムにより, 数値計算する手法 (以下, BMO アルゴリズムと呼ぶ) を提唱した. BMO アルゴリズムの理論的収束性については, Evans [2] の非線形半群を用いた方法や, Barles-Georgelin [1] の粘性解による方法が知られている. また, H. Ishii [4] による球対称核への拡張や H. Ishii-K. Ishii [5] による境界直交条件下での平均曲率流方程式への応用などが知られている. Goto-K. Ishii-Ogawa [3] は, Allen-Cahn 方程式の解析手法を応用して (1) を導出し,  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたときの解の挙動を解析することにより, BMO アルゴリズムの理論的収束性に対する別証明を与えた. この問題は Allen-Cahn 方程式における特異摂動問題に類似した特異極限問題であり, その  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたときの解の挙動は特異的なものであると予想される. そのため,  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたときの解の正則性の変化を調べることは, 数学的に興味ある問題であると思われる. ここでは, (1) の解の正則性の  $\varepsilon$  に関する依存性を考察する. まず, 解の存在について述べる.

**命題 1** (局所解の存在).  $1 \leq p, r \leq \infty$  は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} < \frac{1}{n}, \frac{1}{p} + \frac{2}{r} \leq 1$$

をみたすとする. このとき, 任意の初期値  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $\nabla u_0 \in L^r(\mathbb{R}^n)$  に対して,  $T > 0$  を十分小さくとれば, (1) の一意解  $u_\varepsilon$  が存在して,  $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ ,  $\nabla u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^r(\mathbb{R}^n))$  をみたす.

命題 1 の証明は, 熱半群の  $L^p$ - $L^q$  評価と縮小写像の原理を用いることによる. 命題 1 と Sobolev の埋め込みにより, 解  $u_\varepsilon$  は Hölder 連続となるが,  $\varepsilon$  を固定しているために, 解の正則性が  $\varepsilon$  にどのように依存しているかはわからない. そこで, (1) の解  $u_\varepsilon$  の正則性の  $\varepsilon$  に関する依存性を調べるため, 以下, 非負値解に対する Harnack の不等式について考察する. 線形の放物型方程式に対しては, Harnack の不等式から解の内部正則性, 特に局所 Hölder 連続性を示すことができることはよく知られている. 特に, 不等式に現われる定数 (以下, Harnack 定数と呼ぶ) は Hölder 連続性の次数と関係があり, Harnack 定数がより小さくとれば, Hölder 連続性の次数  $\alpha$  はより大きくとれることがわかっている. また, Harnack 定数は非負値解

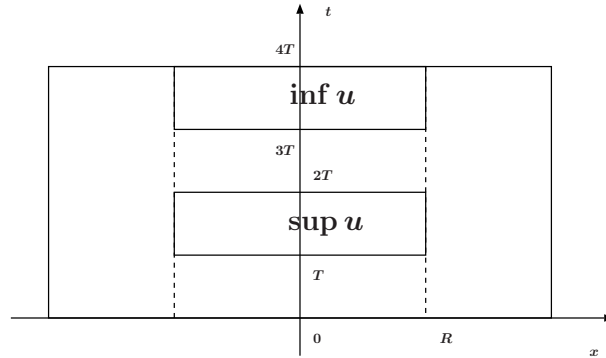


FIGURE 1. 定理 2 における sup と inf の領域

の振動, 特に最大値と最小値の比に関して, ある種の制限を与えることも知られている. 非線形方程式に対しても, Harnack 定数が同様の情報を持っているので, (1) の非負値解に対する Harnack の不等式における, Harnack 定数の  $\varepsilon$  に関する依存性を調べ, 次の結果を得た.

**定理 2** (Harnack の不等式).  $u_\varepsilon$  は  $(0, 4T) \times B_{6R}$  上で  $0 \leq u_\varepsilon \leq M$  をみたす (1) の弱解とする. このとき

$$(2) \quad \sup_{(T, 2T) \times B_R} u_\varepsilon \leq C M e^{\frac{\theta}{\varepsilon}} \inf_{(3T, 4T) \times B_R} u_\varepsilon$$

が成り立つ. ここで定数  $C$  は  $n, T, R$  にのみ依存し,  $\theta$  は  $n, M, T, R$  にのみ依存する.

定理 2 は, 非負劣解に対する局所最大値原理と非負優解に対する弱 Harnack 不等式を組み合わせることによって示される. 証明の困難な点は, 方程式 (1) の非線形項  $|\nabla u|^2$  の効果が  $\Delta u$  の効果とつりあうこと (このような方程式を臨界型方程式という) である. このような方程式は  $|\nabla u|^2$  の係数が小さければ, Moser [6] による手法をそのまま用いることができるが,  $\varepsilon \rightarrow 0$  で係数が大きくなるために, 困難が生ずる. 特に, 非線形項が解の減衰をひきおこすため, 優解の評価, すなわち弱 Harnack 不等式に対する定数の評価が問題になる. この困難の解決のために, Cole-Hopf 変換  $v = e^{\frac{M}{\varepsilon} u}$  を弱解に適用した, Trudinger [7] の手法に習い, 方程式を線形化させることで, 弱 Harnack 不等式を得る. 方程式を Cole-Hopf 変換することにより, Harnack 定数の  $\varepsilon$  における指数的依存性が示される.

### 参考文献

- [1] G. Barles and C. Georgelin, SIAM J. Numer. Anal., **32** (1995), 484–500.
- [2] L. C. Evans, Indiana Univ. Math. J., **42** (1993), 533–557.
- [3] Y. Goto, K. Ishii and T. Ogawa, Commun. Pure Appl. Anal., **4** (2005), 311–339.
- [4] H. Ishii, in “Curvature flows and related topics”, GAKUTO International Series, 1995, 111–127.
- [5] H. Ishii and K. Ishii, SIAM J. Math. Anal., **33** (2001), 369–389.
- [6] J. Moser, Comm. Pure. Appl. Math., **17** (1964), 101–134.
- [7] N. S. Trudinger, Comm. Pure Appl. Math., **21** (1968), 205–226.