平均曲率流方程式に由来する半線形放物型方程式の解に対する正則性評価について

水野 将司

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 D1

2007 年 9 月 24 日

$n \geq 2$, $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t,x)$: 未知関数 , $0 < \varepsilon \ll 1$: パラメータ

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \dfrac{u_\varepsilon}{\varepsilon}(|\nabla u_\varepsilon|^2 - 1) = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (\mathrm{BMO}_\varepsilon)$$

先行研究

- Goto-K. Ishii-Ogawa(2005)
  平均曲率流方程式の数値計算アルゴリズム
  (Bence-Merriman-Osher 1992)

$$\partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon = 0 \quad \text{in } (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n$$

  補助関数の導入 (c.f. Leoni 2001)

$$v_\varepsilon(t,x) = U\left(\frac{u_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \ U(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\eta^2}\, d\eta$$

$$\Longrightarrow \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon}(|\nabla u_\varepsilon|^2 - 1) = 0 \qquad (\mathrm{BMO}_\varepsilon)$$

  (BMO_ε) の特異極限問題 ($\varepsilon \to 0$) の解 u が十分に滑らか

$$\Longrightarrow \partial_t u - \Delta u + \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2} \nabla^2 u = 0 \qquad (\mathrm{MCF})$$

問題

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \dfrac{u_\varepsilon}{\varepsilon}(|\nabla u_\varepsilon|^2 - 1) = 0, \ (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{BMO$_\varepsilon$}$$

(BMO$_\varepsilon$) の解 u_ε の正則性の ε-依存性は？

$$\sup_{D_1} u_\varepsilon \le C_H \inf_{D_2} u_\varepsilon \quad \text{(Harnack 不等式)}$$

線形の方程式の場合

- Harnack 不等式 : Hölder 連続性を導く
- Harnack 定数 C_H が Hölder 次数を決定する

(BMO$_\varepsilon$) に対する Harnack 定数の ε-依存性は？

主定理

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \dfrac{u_\varepsilon}{\varepsilon}(|\nabla u_\varepsilon|^2 - 1) = 0, \ (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(BMO$_\varepsilon$)

<u>定理</u> (Harnack の不等式)
u_ε : (BMO$_\varepsilon$) の弱解,
$(0,4T) \times B_{6R}$ 上で $0 \le u_\varepsilon \le M$

$$\Rightarrow \sup_{(T,2T)\times B_R} u_\varepsilon \le CM \exp\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \inf_{(3T,4T)\times B_R} u_\varepsilon$$

ただし, $C = C(n,T,R)$, $\theta = \theta(n,M)$.

Cole-Hopf 変換

$$\partial_t u - \Delta u + \frac{u}{\varepsilon}(|\nabla u|^2 - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \frac{u}{\varepsilon} = \partial_t u - \Delta u + \frac{u}{\varepsilon}|\nabla u|^2$$

$$\leq \partial_t u - \Delta u + \frac{M}{\varepsilon}|\nabla u|^2$$

Cole-Hopf 変換

$$v := e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \Rightarrow \partial_t v - \Delta v \leq 0$$

弱解の立場で, Cole-Hopf 変換を正当化 (Trudinger 1968)

$u^{-\beta}$ の評価 (Cole-Hopf 変換の正当化)

$$0 \le \partial_t u - \Delta u + \frac{M}{\varepsilon}|\nabla u|^2 \qquad (1)$$

$\beta > 1$, $\eta = \eta(t, x)$; cut-off 関数, $\phi := \eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u}$

$$\int_\tau^{4T}\int_{B_r} \phi \times (1)\, dxds$$

$$\Rightarrow 0 \le \int_\tau^{4T}\int_{B_r} \phi\partial_t u\, dxds + \int_\tau^{4T}\int_{B_r} \nabla\phi\cdot\nabla u\, dxds + \frac{M}{\varepsilon}\int_\tau^{4T}\int_{B_r} \eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u}|\nabla u|^2\, dxds$$

$$\nabla\phi = \nabla(\eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u}) = \nabla(\eta^2) u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} - \beta\eta^2 u^{-\beta-1} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u}\nabla u - \frac{M}{\varepsilon}\eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u}\nabla u$$

$u^{-\beta}$ の評価 (Cole-Hopf 変換の正当化)

$$0 \le \partial_t u - \Delta u + \frac{M}{\varepsilon} |\nabla u|^2 \qquad (1)$$

$\beta > 1\,, \eta = \eta(t, x)$; cut-off 関数, $\phi := \eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon} u}$

$$\frac{1}{\beta - 1} \int_\tau^{4T} \int_{B_r} \eta^2 e^{-\frac{M}{\varepsilon} u} \partial_t u^{-\beta+1}\, dxds$$

$$+ \beta \int_\tau^{4T} \int_{B_r} \eta^2 u^{-\beta-1} e^{-\frac{M}{\varepsilon} u} |\nabla u|^2\, dxds$$

$$\le 2 \int_\tau^{4T} \int_{B_r} \eta u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon} u} \nabla \eta \cdot \nabla u\, dxds$$

$e^{-\frac{M}{\varepsilon} u} \approx e^{-\frac{\theta}{\varepsilon}}$: Harnack 定数のε-依存性 ($\theta \approx M^2$)