退化 Keller-Segel 方程式系の解に対する Hölder 連続性と漸近安定性について

小川 卓克 (東北大学 大学院理学研究科)
水野 将司 (東北大学 大学院理学研究科)

次の退化 Keller-Segel 方程式系を考える:

$$\text{(dKS)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha + \operatorname{div}(u\nabla\psi) = 0, & t>0\,,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi + \lambda\psi = u, & t>0\,,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

ただし, $1<\alpha\leq 2-\frac{2}{n}$ とする. このとき, 十分小さな初期値 u_0 に対し, (dKS) の大域解 (u,ψ) が存在することが知られている (cf. Sugiyama-Kunii [6]). 我々は, この解 u の時刻無限大での漸近挙動について考察する.

U を多孔質媒質方程式の Barenblatt 解とする. すなわち, U は, $\sigma=n(\alpha-1)+2\,,\ A>0$ としたとき,

$$\begin{cases} U(t,x) = (1+\sigma t)^{-\frac{n}{\sigma}} V\left(\dfrac{x}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right), \quad V(y) := \left(A - \dfrac{\alpha-1}{2\alpha}|y|^2\right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}, \\ \|U(0)\|_{L^1} = \|u_0\|_{L^1} \end{cases}$$

をみたすものとする. ここで, $(f)_+ = \max\{f,0\}$ である. Luckhaus-Sugiyama [3] は, (dKS) の解 u に対し,

$$(1) \qquad (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})} \|u(t)-U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{as } t\to\infty$$

を示した. しかし, L^1 空間に対しては, $1-\frac{1}{p}|_{p=1}=0$ となるため, (1) から漸近安定性は得られるものの, 収束の速さはわからない. 他方, Ogawa [5] は $1<\alpha<2-\frac{2}{n}$ のとき, $\nu>0$ がとれて

$$(2) \qquad \|u(t)-U(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+\sigma t)^{-\nu}$$

とできることを示した. この結果を説明するために, 前方自己相似変換

$$s = \frac{1}{\sigma}\log(1+\sigma t)\,, \qquad y = \frac{x}{(1+\sigma t)^{\frac{1}{\sigma}}}$$
$$v(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}} u(t,x)\,, \qquad \phi(s,y) = (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}} \psi(t,x).$$

を導入する (cf. Carrillo-Toscani [1]). このとき, v は

$$\begin{cases} \partial_s v - \operatorname{div}_y(\nabla_y v^\alpha + yv - e^{-\kappa s} v\nabla_y\phi) = 0, & s>0\,,\ y\in\mathbb{R}^n, \\ -e^{-2s}\Delta_y\phi + \lambda\phi = v, & s>0\,,\ y\in\mathbb{R}^n, \\ v(0,y) = u_0(y) \geq 0 \end{cases}$$

をみたす. ただし, $\kappa = n+2-\sigma = n(2-\alpha)$ である. さらに,

$$(3) \qquad (1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}(1-\frac{1}{p})} \|u(t)-U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_x)} = \|v(s)-V\|_{L^p(\mathbb{R}^n_y)}$$

となることから, $s \to \infty$ としたときに, v が L^1 上指数的オーダーで V に収束することを示せば, (2) が得られる. Ogawa は, 代数的オーダーでの漸近安定性を示すために, 前方自己相似変換 v の Hölder 連続性を用いた. 臨界指数である $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ のときは, v の時空間一様な Hölder 連続性が必要であったが, 時空間一様な Hölder 連続性が明らかでなかったため, (dKS) の解の L^1 空間における収束の速さが求められていなかった. 我々は, v に関する時空間一様な Hölder 連続性を導出することで, 臨界指数 $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ に対する (dKS) の解が L^1 空間において, 代数的オーダーで Barenblatt 解に収束することを示した.

定理 1. $n \geq 3$, $\alpha = 2 - \frac{2}{n}$ とする. 十分に小さな非負の初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ は, ある $\beta > n$ に対して, $|x|^\beta u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ をみたすとする. このとき, $C, \nu > 0$ が存在して,

$$\|u(t) - U(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(1 + \sigma t)^{-\nu}, \quad t > 0$$

が成り立つ. ただし, Barenblatt 解 U は $\|U(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ をみたすものとする.

注意 2. 方程式が退化しているため, $u = 0$ では, (3) の解は双曲型方程式の解のように振る舞う. 双曲型方程式の解の漸近挙動, 特に収束の速さには, 解の正則性が必要となる. そのため, 収束の速さ $\nu > 0$ は, v の正則性の指標である Hölder 指数に深く関係している.

前方自己相似変換 v の Hölder 連続性について述べるために, 記号

$$A_\beta := \sup_{a \in \mathbb{R}^n,\, r \leq 1} \|yv - e^{-\kappa s} v \nabla \phi\|_{L^\infty(0,\infty\,:\,L^\beta(B_r(a)))}$$

を導入する. ここで $B_r(a)$ は中心 a, 半径 r の開球である. $|x|^\beta u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ から $A_\beta < \infty$ となることに注意しておく. このとき, 自己相似変換 v の時空間一様な Hölder 連続性は次の通りである.

命題 3. n, α, γ にのみ依存する定数 $C, \gamma > 0$ が存在して

$$|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \leq C(\|u\|^\alpha_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} + A_\beta)(\|u\|^{\frac{\sigma}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)}|t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma) \tag{4}$$

が (t,x), $(s,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ.

注意 4. $\alpha = 1$ のとき, 評価式 (3) は, 熱方程式の解に対する Hölder 評価となっている. 従って, (3) は, 退化放物型方程式に対する Hölder 評価と見ることができる.

命題 3 は, DiBenedetto-Friedman [2], Wiegner [7], Misawa [4] による, p-Laplace 発展方程式の解の勾配に対する Hölder 連続性の導出手法を (dKS) の解の前方自己相似変換に適用することにより得られる. 特に, スケールパラメータとして, 解の振動を使うかわりに解の上限を用いたことにより, 解の Hölder 連続性と Hölder 評価を導出することができた.

References

[1] Carrillo, J. A. and Toscani, G., Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 113–142.
[2] DiBenedetto, E. and Friedman, A., J. Reine Angew. Math. **357** (1985), 1–22.
[3] Luckhaus, S. and Sugiyama, Y., Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), 1279–1297.
[4] Misawa, M., Ann. Mat. Pura Appl. (4) **181** (2002), 389–405.
[5] Ogawa, T., Differential Integral Equations **21** (2008), 1113–1154.
[6] Sugiyama Y. and Kunii, H., J. Differential Equations **227** (2006), 333–364.
[7] Wiegner, M., Ann. Mat. Pura Appl. (4) **145** (1986), 385–405.