多孔質媒質方程式の解に対する Hölder評価

水野 将司　(東北大学 大学院理学研究科 D4)*

次の外力項付き多孔質媒質方程式を考える;

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f + g, & t > 0\,, x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{PME}$$

ここで, $\alpha > 1$ は定数, 外力項 $f = (f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x))$, $g = g(t,x)$ と初期値 $u_0 = u_0(x)$ はそれぞれ $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 上の与えられた関数とする. この方程式 (PME) に対して, 超関数の意味で方程式を満たす解を弱解と呼ぶ. 方程式 (PME) は退化した放物型方程式のため, 一般に弱解は古典解にならない. 特に, $f, g \equiv 0$ のとき, その台がコンパクトとなる特殊解である Barenblatt 解の存在により, 弱解は一般に微分可能にならないことが知られている. そこで, 弱解の正則性を Hölder 連続性の立場から考える. 特に, (PME) の解の Hölder 連続性と外力項との関係を明らかにしたい. なお, Hölder 連続性は, 退化 Keller-Segel 方程式系の解の時刻無限大における漸近挙動の解析に用いられる (文献 [4] を参照).

Caffarelli-Friedman [2] や Caffarelli-Vazquez-Wolanski [1] によって, $f, g \equiv 0$ のときの (PME) の弱解の Hölder 連続性が示された. 彼らの証明は, 比較原理に依存しているが, 応用上の観点から, 比較原理を用いない方法を考える. DiBenedetto-Friedman [3] や Wiegner [5] は $p > 2$ に対し, p-Laplace 発展方程式の解 v の勾配が Hölder 連続となることを, 比較原理を用いずに示した. ところで, $|\nabla v|$ は多孔質媒質方程式にみられる非線形退化放物型方程式の解となることが知られている. このことから, 多孔質媒質方程式の解に対しても, 彼らの手法が適用できると推測される. 実際, DiBenedetto-Friedman [3] は, $f, g \equiv 0$ のときの (PME) の弱解に対する Hölder 連続性を証明した. さらに f, g が適当な可積分性を満たすときに, (PME) の弱解に対する Hölder 連続性を主張しているが, 証明は与えられていないようである. 我々は, f, g に対する条件を彼らの与えた条件より拡張して, (PME) の解に対する Hölder 評価を示した.

主定理を述べるために, 弱 L^p 空間を導入する.

定義 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $p > 1$ に対し, $f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ であるとは, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ かつ

$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\,:\,\mathrm{compact}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{1}{p}}} \int_K |f|\, dx < \infty$$

であるときをいう.

Hölder の不等式と $|x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ より, $L^p(\Omega) \subsetneq L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)$ となることに注意する.

* e-mail: `sa5m16@math.tohoku.ac.jp`

定理 2. $\alpha > 1$ とし, u を (PME) の有界な弱解とする. $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$ をみたす, ある $p, q \geq 1$ に対し, $|f|^2, g \in L^{\frac{q}{2}}(0,\infty; L_{\mathrm{w}}^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^n))$ を仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, u は $(\varepsilon,\infty) \times \mathbb{R}^n$ 上一様に Hölder 連続となり, $(t,x),(s,y) \in (\varepsilon,\infty) \times \mathbb{R}^n$ に対して

$$
\begin{aligned}
|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \leq C(&\|u\|^{\alpha}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \\
&+ \|u\|^{\frac{1}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \||f|^2\|^{\frac{1}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(0,\infty;\, L_{\mathrm{w}}^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^n))} + \|u\|^{\frac{2}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(0,\infty;\, L_{\mathrm{w}}^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^n))}) \\
&\times (\|u\|^{\frac{\sigma}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)} |t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^\sigma)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで, $C, \sigma > 0$ は, $n, \alpha, p, q, \varepsilon$ にのみ依存する定数である.

文献 [3] において, 内在的スケールとして, 解の振動を用いているが, この方法では, Hölder 評価が導出できないと考えられる. Hölder 評価を導出するためには, 内在的スケールを修正するとともに, 分割交代型の議論を精密に行う必要がある. そこで, 本論文では, 内在的スケールとして, 解の最大値を用いる. この修正を正当化するために, $\rho, M > 0$ に対し, $Q_{\rho,M} := (-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0) \times B_\rho$ とおき, 次に示す分割交代型の補題を新たに確立することによって, 解に対する Hölder 評価を示した.

補題 3. $\omega, M > 0$ に対して, $\sup_{Q_{\rho,M}} u \leq M \leq 4 \sup_{Q_{\rho,M}} u$ と $\frac{3}{4}\omega \leq \operatorname{osc}_{Q_{\rho,M}} u \leq \omega$ を仮定する. このとき, n, α, p にのみ依存する定数 $0 < \theta_0, \eta_0 < 1$ と放物型円柱 $Q \Subset Q_{\rho,M}$ が存在し, 十分小さな $\rho > 0$ に対して, 次の (i), (ii) が成り立つ:

(i) (lower bounds)

$$|Q_{\rho,M} \cap \{u < \inf_{Q_{\rho,M}} u + \frac{\omega}{2}\}| \leq \theta_0 |Q_{\rho,M}|$$

ならば, $\inf_Q u \geq \inf_{Q_{\rho,M}} + \eta_0 \omega$ となる.

(ii) (upper bounds)

$$|Q_{\rho,M} \cap \{u < \inf_{Q_{\rho,M}} u + \frac{\omega}{2}\}| > \theta_0 |Q_{\rho,M}|$$

ならば $\sup_Q u \leq \sup_{Q_{\rho,M}} u - \eta_0 \omega$ となる.

補題 3 の (i), (ii) のどちらの場合でも, $\operatorname{osc}_Q u \leq (1-\eta_0) \operatorname{osc}_{Q_{\rho,M}} u$ がわかる. 補題 3 を繰り返して用いることにより, 解の Hölder 連続性が従う.

参考文献

[1] Caffarelli, L. A., Vázquez, J. L. and Wolanski, N. I., Indiana Univ. Math. J., **36** (1987), 373–401.

[2] Caffarelli, L. A. and Friedman, A., Indiana Univ. Math. J., **29** (1980), 361–391.

[3] DiBenedetto, E. and Friedman, A., J. Reine Angew. Math., **357** (1985), 1–22.

[4] Ogawa, T. and Mizuno, M., *Regularity and asymptotic stability for the Keller-Segel system of degenerate type with critical non-linearity*, preprint.

[5] Wiegner, M., Ann. Mat. Pura Appl. (4), **145** (1986), 385–405.