多孔質媒質方程式の解に対する **Hölder** 評価

水野 将司 (東北大・理, 学振研究員 DC)

2010 年 9 月 23 日

porous medium 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,, x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad \text{(PME)}$$

- $f = (f_1(t,x), \ldots, f_n(t,x))$: 既知関数
- $\alpha > 1$: 定数

定義 (弱解)

$u_0 \in L^1 \cap L^{\alpha+1}, \quad f \in L^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$

u: (PME) の弱解 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists T > 0$ s.t.

- $u \geq 0$ a.e. in $(0,T) \times \mathbb{R}^n$,
- $u \in L^\infty(0,T\,; L^1 \cap L^{\alpha+1})$, $\nabla u^\alpha \in L^2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$,
- u は (PME) を超関数の意味でみたす.

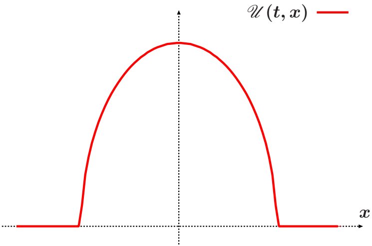
Barenblatt 解

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = 0, & t > 0\,, x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad \text{(PME)}$$

Barenblatt 解 $\quad \sigma = n(\alpha - 1) + 2,\ A > 0$

$$\mathscr{U}(t,x) = \frac{1}{(1+\sigma t)^{\frac{n}{\sigma}}} \left(A - \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \frac{|x|^2}{(1+\sigma t)^{\frac{2}{\sigma}}} \right)_+^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

- $\mathscr{U}$: (PME) の解
- $\mathscr{U}$: 滑らかでない
- $\mathscr{U}$: Hölder 連続



問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \mathrm{div}\, f, & t > 0\,, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad \text{(PME)}$$

問題

(PME) の解の Hölder 連続性と外力 f との関係は？
定量的な評価は？

既存の結果

- DiBenedetto-Friedman ('85)

$$\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1, \quad f \in L^q(0,\infty\,;L^p)$$

$\Longrightarrow u$: Hölder 連続 (定性的)

主定理

定義 (弱 L^p 空間)

$p > 1$, $f \in L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n) \overset{\mathrm{def}}{\iff} f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ かつ

$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{K\subset\mathbb{R}^n\,:\,\text{compact}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{1}{p}}} \int_K |f|\,dx < \infty$$

注意　$L^p \subsetneq L^p_{\mathrm{w}} \quad \because \ |x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}} \setminus L^p$

定理

$\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$, $f \in L^q(0,\infty\,;\,L^p_{\mathrm{w}})$, u: (PME) の有界な弱解
$\Longrightarrow u$: Hölder 連続, かつ $\exists C > 0$, $0 < \exists\sigma < 1$ s.t.

$$|u(t,x)-u(s,y)| \le C(\|u\|_\infty + \|u\|_\infty^{\frac{1}{q}(1-\frac{1}{\alpha})}\|f\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^q(0,\infty\,;\,L^p_{\mathrm{w}})}) \times (\|u\|_\infty^{\frac{\sigma}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}|t-s|^{\frac{\sigma}{2}} + |x-y|^{\sigma})$$

主定理に関する注意

定理 (前述)

$\frac{2}{q}+\frac{n}{p}<1$, $f\in L^q(0,\infty\,;\,L^p_{\mathrm{w}})$, u: (PME) の有界な弱解
$\Longrightarrow$ u: Hölder 連続, かつ $\exists C>0$, $0<\exists\sigma<1$ s.t.

$$|u(t,x)-u(s,y)|\le C\Big(\|u\|_\infty+\|u\|_\infty^{\frac{1}{q}(1-\frac{1}{\alpha})}\|f\|^{\frac{1}{\alpha}}_{L^q(0,\infty\,;\,L^p_{\mathrm{w}})}\Big)$$
$$\times\Big(\|u\|_\infty^{\frac{\sigma}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}|t-s|^{\frac{\sigma}{2}}+|x-y|^\sigma\Big)$$

$0<\rho\ll 1$, $M=\|u\|_\infty$, $t=\frac{\rho^2}{M^{\alpha-1}}s$, $x=\rho y$

$\tilde u(s,y)=\frac{1}{M}u(t,x)$, $\tilde f(s,y)=f(t,x)$

$$\Longrightarrow\ \partial_s\tilde u-\Delta\tilde u^\alpha=\rho\,\mathrm{div}\Big(\frac{1}{M^\alpha}\tilde f\Big)$$

$$\|\rho\tilde f\|_{L^q(L^p_{\mathrm{w}})}=\rho^{1-\frac{2}{q}-\frac{n}{p}}M^{\frac{1}{q}(\alpha-1)}\|f\|_{L^q(L^p_{\mathrm{w}})}$$

鍵となる補題

$$v = u^\alpha, \quad Q_{\rho,M} := (-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0) \times B_\rho$$

補題

$0 < \rho \ll 1$, $M \cong \sup_{Q_{\rho,M}} v$, $\omega = \mathrm{osc}_{Q_{\rho,M}} v$,
$\Longrightarrow \ 0 < \exists\theta_0$, $\exists\eta_0 < 1$, $\exists\lambda_0 > 0$, $\exists Q' \Subset Q_{\rho,M}$ s.t.

- (the lower bounds)

$$\frac{|Q_{\rho,M} \cap \{v < \lambda_0\}|}{|Q_{\rho,M}|} \leq \theta_0 \Rightarrow v \geq \inf_{Q_{\rho,M}} v + \eta_0\omega \text{ in } Q'$$

- (the upper bounds)

$$\frac{|Q_{\rho,M} \cap \{v < \lambda_0\}|}{\theta_0|Q_{\rho,M}|} > \theta_0 \Rightarrow v \leq \sup_{Q_{\rho,M}} v - \eta_0\omega \text{ in } Q'$$

$$\therefore \operatorname*{osc}_{Q'} v = \sup_{Q'} v - \inf_{Q'} v \leq (1-\eta_0) \operatorname*{osc}_{Q_{\rho,M}} v$$