発展 p-Laplace 方程式の解に対する Hölder 評価について

水野 将司

北海道大学 理学研究院

2011 年 9 月 29 日

北海道大学
HOKKAIDO UNIVERSITY

発展 p-Laplace 方程式

発展 p-Laplace 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \operatorname{div} f, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (p\text{-P})$$

$f = f(t,x)$: 既知関数, $p > \max\{\frac{2n}{n+2}, 1\}$.

定義 (弱解)

u: (p-P) の弱解 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T > 0$ s.t.

- $u \in L^\infty(0,T\,;\,L^2(\mathbb{R}^n))$ かつ $\nabla u \in L^p((0,T) \times \mathbb{R}^n)$
- u は (p-P) を超関数の意味でみたす.

問題

∇u の Hölder 連続性は？f の正則性との関係は？

既存の結果と主結果

$$\partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \operatorname{div} f, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (p\text{-P})$$

既存の結果

- DiBenedetto-Friedman ('85), Wiegner ('86)

$$f \equiv 0 \Longrightarrow \nabla u : \text{Hölder 連続}$$

- Misawa ('02)

$$f : (t, x) \text{ について Hölder 連続} \Longrightarrow \nabla u : \text{Hölder 連続}$$

定理

$\frac{2}{r} + \frac{n}{q} < 1$, $\nabla f \in L^r(0, \infty; L^q(\mathbb{R}^n)) \Longrightarrow \nabla u$: Hölder 連続.

主定理に関する注意

$$\partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \operatorname{div} f, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (p\text{-P})$$

定理 (前述)

$\frac{2}{r} + \frac{n}{q} < 1$, $\nabla f \in L^r(0,\infty\,;\, L^q(\mathbb{R}^n)) \Longrightarrow \nabla u$: Hölder 連続.

- $\frac{2}{r} + \frac{n}{q} < 1$, $\nabla f \in L^r_t(L^q_x) \Longrightarrow f$ は t について連続でなくてよい.
- $n = 1$ のとき

$$\partial_t u - \partial_x(|\partial_x u|^{p-2}\partial_x u) = \partial_x f$$

$$w := \partial_x u \Longrightarrow \partial_t w - \partial_x^2(|w|^{p-2}w) = \partial_x(\partial_x f)$$

$$\partial_x f \in L^r_t(L^q_x) \Longrightarrow w : \text{Hölder 連続}$$

証明の鍵

$$\partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \operatorname{div} f, \quad -R^2 < t < 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (p\text{-P})$$

Reference 方程式

$$\begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, & \text{in } Q_R = (-R^2, 0) \times B_R, \\ v = u, & \text{on } Q_R \text{の放物型境界.} \end{cases} \qquad (\text{RE})$$

補題

$p > 2$, $\exists C = C(n,p) > 0$ s.t.

$$\iint_{Q_R} |\nabla u - \nabla v|^p \, dxdt \le C \|\nabla f\|_{L_t^r(L_x^q)}^{\frac{p}{p-1}} R^{n+2+\frac{p}{p-1}\left(1-\frac{n}{q}-\frac{2}{r}\right)}.$$

$$1 - \frac{n}{q} - \frac{2}{r} > 0 \Longleftrightarrow \frac{n}{q} + \frac{2}{r} < 1$$