Neumann境界条件付Allen-Cahn方程式の特異極限問題

水野 将司　(日本大学 理工学部)*1
利根川 吉廣　(北海道大学 大学院理学研究院)*2

次のNeumann境界条件におけるAllen-Cahn方程式の特異極限を考える:

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t u^\varepsilon = \varepsilon \Delta u^\varepsilon - \dfrac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon}, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \left. \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{(AC)$_\varepsilon$}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域, ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル, $W(u) = \frac{1}{4}(1-u^2)^2$ とする. (AC)$_\varepsilon$ はModica-Mortola問題のエネルギー汎関数

$$E^\varepsilon[u] := \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{W(u)}{\varepsilon} \right) dx$$

の勾配流であり, $E^\varepsilon[u_0^\varepsilon] < \infty$, $\|u_0^\varepsilon\|_\infty \leq 1$ のもとで, 滑らかな一意大域解 u^ε が得られる. そこで,

$$d\mu_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon} \right) dx$$

と定める.

$\Omega = \mathbb{R}^n$ のとき, すなわち初期値問題に対する μ_t^ε の極限測度の性質はIlmanen [2] によって研究された. より正確には, Grassmann多様体 $G(n, n-1)$ 上のDirac測度 $\delta_{(\frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|})^\perp}$ との積測度 $V_t^\varepsilon := \mu_t^\varepsilon \delta_{(\frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|})^\perp}$ の極限測度の族 $\{V_t\}_{t \geq 0}$ が平均曲率流の幾何学的測度論的な弱解 (Brakke解 [1]) になる (cf. Soner [4], Tonegawa [5]). ここで, $(\frac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|})^\perp$ は, V_t の接空間の近似を表していることから, (AC)$_\varepsilon$ の特異極限のもとでは, 直交境界条件を与えるであろうと推測される. しかし, 幾何学的測度論的な直交境界条件をどのように定式化すればよいかは自明ではない. 我々は測度論的な直交境界条件の定式化と, この条件をみたすBrakke解の存在を示した.

定理を述べるために, 次の仮定をおく.

1. $\sup_{0<\varepsilon<1} E^\varepsilon[u_0^\varepsilon] < \infty$, $\sup_{0<\varepsilon<1} \|u_0^\varepsilon\|_\infty \leq 1$.

本研究は科研費 (#21224001, #25800084, #25247008) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 28A75, 35K20, 53C44
キーワード：Boundary monotonicity formula, Allen-Cahn equation, Mean curvature flow, varifold

*1 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1-8-14
e-mail: `mizuno@math.cst.nihon-u.ac.jp`
web: `http://www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~mizuno`
*2 〒060-0810 北海道札幌市北区北10条西8丁目
e-mail: `tonegawa@math.sci.hokudai.ac.jp`
web: `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tonegawa/toppage.htm`

2. Ω は強凸, すなわち $\partial\Omega$ の曲率は正である.

定理 1. 部分列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\overline{\Omega}$ 上の Radon 測度 μ_t が存在して, $\varepsilon_i \to 0$ かつ, すべての $t \geq 0$ に対して

$$\mu_t^{\varepsilon_i} \rightharpoonup \mu_t, \quad i \to \infty$$

が成り立つ. さらに, ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して, μ_t は可算 $(n-1)$-修正可能測度である.

定理 1 で得られた μ_t と任意の $t \geq 0$ に対して, $\|V_t\| = \mu_t$ となる $\overline{\Omega} \times G(n, n-1)$ 上の Radon 測度 (ヴァリフォールド)V_t を考える.

定理 2. ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して V_t の全変動 $\|\delta V_t\|$ は $\|\delta V_t\|(\overline{\Omega}) < \infty$ をみたす.

定理 2 により, V_t の第一変分 δV_t の $\partial\Omega$ への制限を考えることができる. そこで, $g \in C(\partial\Omega : \mathbb{R}^n)$ に対して, V_t の第一変分の $\partial\Omega$ の接空間上への制限

$$\delta V_t \lfloor_{\partial\Omega}^{\top}(g) := \delta V_t \lfloor_{\partial\Omega}(g - (g \cdot \nu)\nu)$$

を考える.

定理 3. ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して, $\|\delta V_t \lfloor_{\partial\Omega}^{\top} + \delta V_t \lfloor_{\Omega}\| \ll \|V_t\|$ となる. Radon-Nikodym 微分

$$\delta V_t \lfloor_{\partial\Omega}^{\top} + \delta V_t \lfloor_{\Omega} = -h(t)\|V_t\|$$

を考えると, $h(t) \in L^2(\|V_t\|)$ をみたす. さらに $\nabla\phi(x,t) \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0$ をみたす $\phi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,\infty) : \mathbb{R}^+)$ と $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ に対し, Brakke の不等式

$$\int_{\overline{\Omega}} \phi(x,t)\, d\|V_t\|(x) \Big|_{t=t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\overline{\Omega}} \big(-\phi|h|^2 + \nabla\phi \cdot h + \partial_t\phi \big)\, d\|V_t\| dt.$$

が成り立つ.

定理 3 において, $\|\delta V_t \lfloor_{\partial\Omega}^{\top}\| \ll \|V_t\|$ が測度論的な直交境界条件を与えている. なぜなら, $\partial\Omega$ の接方向への変分については特異測度が消えることから, V_t の $\partial\Omega$ における従法線は $\partial\Omega$ の接空間に直交すると考えられるからである.

参考文献

[1] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Mathematical Notes, vol. 20, Princeton University Press, 1978.

[2] T. Ilmanen, J. Differential Geom. **38** (1993), 417–461.

[3] M. Mizuno and Y. Tonegawa, Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions, arXiv:1403.5624.

[4] H. M. Soner, J. Geom. Anal. **7** (1997), 437–475.

[5] Y. Tonegawa, Hiroshima Math. J. **33** (2003), 323–341.